Math. U
144h

th. U. 144h

Ohm.

Geschenk
des Verfassers
an d. Akademie d. Wissenschaften.

<36603751940013

<36603751940013

Bayer. Staatsbibliothek

m

Dr. Martin Ohm's,

Königl. Preuß. Oberlehrers der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Thorn, Mitgliedes mehrerer gelehrten Gesellschaften,

Kritische Beleuchtungen

der

Mathematik

überhaupt

und der

Euklidischen Geometrie

insbesondere.

R

Für

Mathematiker und Nichtmathematiker

als

Einleitung in dessen Revision der Mathematik.

Berlin, 1819.

In der Maurerschen Buchhandlung.

(Poststraße Nr. 29.)

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Seinem

geliebten Bruder,

dem

Herrn

Dr. Georg Simon Ohm,

Professor der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Cölln,

in brüderlicher Liebe

gewidmet

von

dem Verfasser.

Geliebtester Bruder!

Unser Vater, aus väterlicher Liebe und vermöge eines innern Dranges für das Wahre und Gute, fing noch in seinem 44sten Lebensjahre an, sich, was außerhalb seines bürgerlichen Berufes lag, mit den Wissenschaften und zwar vorzüglich mit der Mathematik zu beschäftigen und erwarb sich, bey der kärglichst zugemessenen Zeit seiner Nebenstunden, ganz ohne fremde Hülfe, einzig durch sein unermüdetes Forschen und Streben, große Einsicht in diese Wissenschaft. Von ihm schon in unserer frühesten Jugend zum Studium der Mathematik angehalten, gewannen wir eine Liebe für diese Wissenschaft, die sich mit unserm Fortschreiten in ihr immer noch vergrößerte und die gewiß nie in uns erlöschen wird. Als Du 1804 in Deinem 15ten Jahre, während ich in meinem 12ten stand, von einem un-

serer vorzüglichsten Mathematiker ein Zeugniß erhieltest, in welchem der edle Mann unsere Familie als einer besondern Unterstützung würdig empfahl, weil, wie er sich in seinem gut gemeinten Wunsche ausdrückte, aus ihr vielleicht die Gebrüder Bernoulli wieder hervorgehen könnten; da gelobte sich ein jeder von uns, von der Unmöglichkeit der Erfüllung dieses Wunsches überzeugt, uns wenigstens desselben würdig zu zeigen. Schwierigkeiten aller Art standen unserm Streben mächtig entgegen. Du folgtest 1806 einem Ruf in die Schweitz als Lehrer der Mathematik. Getrennt durch einen weiten Raum, mehr noch durch die unglücklichen Verhältnisse, in welche 1806 unsre Vaterstadt Erlangen und somit auch unser väterliches Haus verwickelt wurde, die uns kaum einen Briefwechsel, und dann nur einen höchst sparsamen, verstatteten, schien unser gemeinschaftliches Streben nach einem Ziele verschwunden zu seyn. Aber unsre Freude war groß, als wir bey einer kurzen Vereinigung zu Neuenburg (Neufchatel) im Herbste 1809 bemerkten, daß ein jeder seiner Wissenschaft treu geblieben war,

und daß ein jeder weiter vorgeschritten war, als ihn der andere sich dachte. Damals war es, als ich Deinen tiefen Geist erfaßte und Deine Weise zu forschen für mich zum Muster nahm. Mit weit geläutertern Ansichten kehrte ich nach Erlangen zu meinen Studien zurück. Wir vereinigten uns endlich wieder, beyde 1811 fast zu gleicher Zeit an der Universität Erlangen als Privatdocenten der Mathematik auftretend, indem wir den schönen Wahn hegten, daß Baiern, zu welchem Reiche Erlangen nun gehörte, der Boden sey, auf dem die Mathematik mehr gedeihen würde, als wir sie überhaupt in Deutschland vorwärts schreiten sahen. Damals vereinigten wir uns zu einer Revision der Mathematik, beyde höchst unzufrieden mit ihrem dermaligen Zustand. Du beschäftigtest Dich aus Vorliebe mit der Geometrie, ich dagegen nahm den Kalkul, der mir in seinen Principien noch verworrener schien, besonders in's Auge. Es war eine schöne fruchtbringende Zeit für uns, wo wir, zusammen wohnend, täglich einander das Fortschreiten unsrer Arbeiten mittheilen, unsre Ideen austauschen und gegen-

seitig berichtigen konnten. Aber kurz nur war die Dauer dieser erfreulichen Periode. Du vertauschtest schon im folgenden Jahre Deinen Aufenthalt zu Erlangen mit dem zu Bamberg. Unsre Körper waren getrennt, aber nicht unsre Geister. Auch machte die Nähe unseres beyderseitigen Wohnorts jeden Tag eine Vereinigung möglich, die noch überdies zuweilen mehrere Monate lang dauerte. Jeder von uns lößte seine Aufgabe. Während ich 1816 meine Ansichten vom Kalkul bekannt machte, ließest Du 1817 die Deinigen über die Geometrie folgen. Ich erkannte in deinem Werke den schon früher bewunderten tiefen Forschungsgeist wieder. Ich sah ein, daß die Geometrie nur auf dieser Grundlage als völlig reine und streng evidente Wissenschaft erscheinen könne. Die Grundlage war beyderseits gelegt; aber nicht Zeit hatten wir, um gemeinschaftlich darauf nun weiter bauen zu können. Nachdem ich 6 Jahre lang als Lehrer an der Universität Erlangen für meine unermüdeten Arbeiten keine andere Belohnung erhalten hatte, als den Dank vieler meiner zahlreichen Zuhörer, die Liebe mehrerer

achtungswerthen Männer und Lehrer dieser Anstalt, und das Bewußtseyn, der Universität, der ich meine Bildung verdankte, diesen Dank durch das Wiederbeleben des mathematischen Studiums an ihr, so vieles die höchst ungünstigen Umstände verstatteten, thätig bewiesen zu haben (eine Belohnung die mich immer mit Freude und Wonne erfüllen wird, so oft ich ihrer gedenke, die aber nicht das Schicksal Kepler's von mir hätte abwenden können, obschon ich dessen im Sinne Kästner's *) nicht würdig gewesen wäre); nachdem auch Du mit Deinem Wirkungskreise in Baiern unzufrieden zu seyn die größte Ursache hattest, verließen wir beyde 1817, wieder beynahe zu gleicher Zeit, unser bisheriges Vaterland, um im Preußischen Staate, jeder an seinem dermaligen Aufenthaltsort, den Sinn für die Wissenschaft zu finden, den wir in Baiern vergebens gesucht hatten. In so weiter Entfernung war es nicht mehr möglich an gemeinschaft-

---

*) Kästner sagt von diesem großen Manne:
Er wußte nur die Geister zu vergnügen,
Drum ließen ihn die Körper ohne Brot.

liche Arbeiten zu denken, und ein jeder blieb sich selbst überlassen. Ich beschloß die kurze Zeit, die ich hier zu bleiben gedachte, zu benutzen und durch Ausarbeitung meiner Ansichten der Mathematik, das in Deutschland so gesunkene Interesse für diese Wissenschaft wo möglich wieder zu beleben, dabey aber auch durch zweckgemäße Schulschriften zur Verbesserung des auf unsern Schulen meist noch höchst mangelhaften, zuweilen sogar ganz erbärmlich schlechten mathematischen Unterrichts beyzutragen. Bald aber sah ich ein, daß ich in ersterer Hinsicht hier nur vorarbeiten könne, weil ich ohne viele litterärische Hülfsmittel, die mir nur vollständige Bibliotheken und eine engere Verbindung mit unsern vorzüglichern Mathematikern gewähren können, und ohne mehr Zeit dazu zu haben, als mir meine hiesigen amtlichen Verhältnisse übrig lassen, unmöglich etwas vollständiges und gänzlich befriedigendes leisten möchte (was nur dann der Fall seyn kann, wenn das Werk das weite Gebiet der gesammten Mathematik in ihrem Entstehen, in ihrem Seyn und in ihrem Werden umfaßt); und ich begnüge mich daher in die-

ser Beziehung einstweilen nur leuchtende Punkte in die mathematische Welt zu werfen, bis eine andre Lage das Ganze zur Reife bringen wird.

Diesen Umständen hat auch die kleine vorliegende Schrift ihr Entstehen zu verdanken. Du wirst wahrnehmen, wie ich im Anfange des geometrischen Theils bloß Deinen Principien gefolgt bin, wie ich überhaupt Deine Principien (der Geometrie nehmlich) zur Grundlage meines Systems gemacht habe. Wenn wir auch zur Zeit vielleicht noch in den Folgerungen von einander abweichen, so ist doch beyden das Streben nach Wahrheit gemeinschaftlich, das selbst die entgegengesetzten Richtungen nicht verschmäht, um zum Ziele zu gelangen. Immer verdanke ich doch Deinen Forschungen nur die Klarheit meiner Ansichten der Geometrie, und in diesem Dankgefühle eigne ich Dir diese Bogen zu, überzeugt daß Du auch das Uebrige, was nicht an sich schon Dein Eigenthum ist, von mir mit alter brüderlicher Liebe aufnehmen wirst.

Möge ein günstiges Geschick uns bald wieder einander näher bringen oder gänzlich

vereinigen. Vereint leisteten wir, was einzeln vielleicht nicht möglich gewesen wäre. Getrennt wollen wir wenigstens fortfahren, durch unermüdetes Streben nach dem Großen, Guten, Edlen und Schönen zur Veredlung der Menschheit, so viel wir nur immer vermögen, beyzutragen.

Gedenke mit Liebe

Deines

Thorn, Bruders.

den 16ten März **Dr. M. Ohm.**

1819.

§. 1.

Unter Geometrie des Euklides verstehen wir eine Zusammenstellung geometrischer Wahrheiten in derselben systematischen Folge, wie sie dieser alte Geometer aufgestellt hat, und wie sie die meisten Geometer der neuern Zeit, ihm größtentheils strenge folgend, mit wenigen ausserwesentlichen Abänderungen in ihren Lehrbüchern beybehalten haben.

§. 2. Studiren wir diese Geometrie, so müssen wir über den durchdringenden Geist, der aus der Behandlung der einzelnen Sätze hervorleuchtet, so wie über die wissenschaftliche Strenge, mit der einzelne Sätze durch vorhergehende erwiesen sind, gleichmäßig staunen, und wir verehren daher mit Recht in jenem Weisen den Vater der Geometrie, der den Geometern aller Zeiten ein lehrreiches Vorbild seyn mußte und es auch in Zukunft immer seyn wird.

§. 3. Müssen wir aber jetzt noch, müssen selbst unsre spätesten Nachkommen noch über dieses unschätzbare Gebäude menschlicher Erkenntniß aus jener Zeit staunen; welch hochgefeiertes Werk mußte nicht diese Geometrie zur Zeit des Wiederauflebens der Wissenschaften in Europa für alle diejenigen seyn, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigten. Kann man sich daher wundern, wenn dieses Werk, einzig in seiner Art, allgemein als ein positives Gesetzbuch des Raums,

ja selbst der Größe überhaupt betrachtet und angenommen wurde, um auf dasselbe gründend, dem Drange des forschenden Geistes nach fernern Wahrheiten Genüge leisten zu können?

§. 4. Nichts desto weniger standen einzelne Denker auf, die sich mit der Euklidischen Strenge nicht begnügten, sondern die Wissenschaft, die ihnen auf zu schwankendem Grunde gebaut schien, fester und strenger zu begründen versuchten. Der Umstand, daß der Raum als Gegenstand der Geometrie nicht weiter erklärt werden kann, die Unmöglichkeit zur Stetigkeit des Raumes durch die Zahl, die nicht stetig ist, zu gelangen, die Unmöglichkeit gerade und krumme Linien mit einander zu vergleichen, lauter Dinge, die theils angenommen, theils verworfen wurden, der Mangel an Anschaulichkeit dieser Untersuchungen, alles dieses vereint bewirkte ein Zweifeln, ein Grübeln, welches mehrere verschiedene, von der Euklidischen abweichende Methoden zur Folge hatte. — Die einen nahmen an, daß der Raum in's Unendliche theilbar sey, die andern läugneten dies. Die letztern betrachteten dann die Linien als aus Punkten, d. h. aus solchen nicht mehr theilbaren Raumtheilchen zusammengesetzt, und erklärten so gerade und krumme Linien auf gleiche Weise. Die erstern nahmen zwar überall in der Linie Punkte an, konnten aber doch die Linie nicht als aus an einander gereihten Punkten bestehend betrachten, und diejenigen, welche in dieser letztern Ansicht consequent bleiben wollten, mußten daher den Punkt als bloße Grenze der Raumgröße ansehen, der nicht noch selbst ein Raumtheilchen ist. Allein dann konnte man die krummen Linien und mehreres andere eben so wenig genügend erklären.

§. 5. Die Erfindung der Differentialrech-

nung, die eine Folge der Untersuchung der krummen Linien war, in so fern man nehmlich Tangenten an sie zu ziehen versuchte, warf noch mehr Feuer statt Licht unter die Streitenden. Ein Glück war es, daß die Sätze der Geometrie, sie mochten erschlossen seyn, wie sie wollten, jeden Augenblick in der Anschaulichkeit der räumlichen Gegenstände einen Probestein fanden, durch den sich die Sinne unmittelbar von der Richtigkeit oder der Unrichtigkeit des Behaupteten überzeugen konnten, wenn dieß auch dem Verstande selbst nicht gelingen wollte. Ohne diesen Umstand würde man, troß der Strenge mit der die einzelnen Sätze aus einander abgeleitet werden, wegen Mangel eines festen Grundes, die Richtigkeit des Gefolgerten unaufhörlich zu bezweifeln die größte Ursache gehabt haben und die Geometrie wäre dann gerade wie die Philosophie eine Wissenschaft geblieben, deren Sätze immer nur subjektive Ueberzeugung gehabt hätten, ohne sich je bis zur allgemeinen erheben zu können.

§. 6. In der neuesten Zeit setzten sich mehrere über die strengere Begründung der Principien ganz weg, und suchten bloß, was ihnen räthlicher und ersprießlicher schien, in dem unermeßlichen Gebiete der mathematischen Wahrheiten weiter vorzudringen. Besonders zeichneten sich hierin seit Lagrange die französischen Mathematiker aus. Das Gebiet der Differential- und Integralrechnung, das Euler schon als ein eigenes, von dem der Geometrie getrenntes darstellte, das aber erst durch Lagrange von fremden, wenigstens versteckt geometrischen Betrachtungen gänzlich abgesondert wurde, bot dazu ein weites Feld dar, das alle Köpfe genugsam zu beschäftigen im Stande war und im Stande ist. Der herrliche, glänzende Erfolg, der aus die-

ser Richtung des forschenden Geistes im Gebiete der Mathematik hervorgieng, rechtfertigt die richtige, praktische Ansicht dieser Parthey zur Genüge. Die ganze Mathematik gewann dadurch eine neue Gestalt und erhob sich zu einer Höhe, die zu erreichen, vorher gar nicht als möglich gedacht werden konnte. Es entstand unter andern die analytische Geometrie *) (nicht die vorher schon gekannte Anwendung der Algebra auf Geometrie); und indem man dahin gelangte, die Auffindung beynahe aller mathematischen Wahrheiten auf den Kalkul zurück zu führen, erreichte man eine Allgemeinheit der Ansicht, so wie auch eine Allgemeinheit der Sätze, die man vorher nicht einmal ahnen mochte.

§. 7. Aber selbst die Mathematiker dieses Ranges versuchten es zuweilen, den sogenannten metaphysischen Theil der Mathematik in's reine zu bringen, und es strebte wenigstens ein jeder, nur der eine mehr, der andere minder, in den Principien so überzeugend als möglich zu werden. Insbesondere war die analytische Behandlung der Geometrie nicht geschaffen, die Schwierigkeiten in den Principien dieser Wissenschaft zu heben, die sie, wenn auch nicht das ganze System, wie es Euklides aufstellte, doch aber die ersten Begriffe der Linien und der Winkel und der Flächen überhaupt und die Bestimmung der Punkte im Raume durch Linien und Winkel voraussetzt. Und es blieb sonach die völlig strenge Begründung der Geometrie des Euklides doch noch immer ein wichtiger Gegenstand des Nachdenkens der Geometer.

*) Die analytische Geometrie und die analytische Mechanik mußten hinsichtlich ihres Entstehens nothwendige Folgen aus einander seyn.

§. 8. Während daher die Mathematik auf der einen Seite riesenhafte Fortschritte machte, eben weil sie selbst und nicht die Begründung ihrer Principien, die einer andern Wissenschaft zukommt, zum Gegenstand der Behandlung genommen wurde; eben weil man ihre Möglichkeit durch ihre Wirklichkeit bewies, und nicht durch metaphysische Betrachtungen a priori zu erweisen suchte, entstand auf der andern Seite besonders in Deutschland eine Parthey, die ihr um so gefährlicher seyn mußte, als solche diese Wissenschaft nur dem Namen nach, in der That aber eine ganz andere zum Gegenstand ihrer Forschungen gewählt hat. Ich meine die mathematisch-philosophische Parthey. *) Sie geht von dem Grundsatz aus, daß die Mathematik als Wissenschaft des Raumes und der Zeit höher begründet sey als in der Erscheinung, daß sie allgemeines Weltgesetz sey, und als solches auf dem höchsten Gipfel menschlicher Erkenntniß stehe, daß daher ihre Sätze es sind, aus denen alle unsre übrigen Erkenntnisse erst abgeleitet werden müssen. Daraus folgern sie weiter, daß die mathematischen Sätze als Gegenstand der höchsten Intelligenz alle dem anschauenden Geiste neben einander klar und offen vorliegen, daher keiner weitern Ableitung, also keines Beweises bedürfen. — Eine bequeme Wissenschaft fürwahr, die ihre Sätze so apodyktisch auf Treu und Glauben hinstellen darf, ohne sich der weitern Beweise wegen Mühe geben zu müssen. Sie hat noch überdies vieles für sich, da wir wirklich in der Naturlehre im allgemeinsten Sinne des Wortes,

*) Ich unterscheide mathematische Philosophie von philosophischer Mathematik.

eine Menge von Erscheinungen wahrnehmen, wo gewisse Zahlen- und Raum-Verhältnisse auf eine eigene Weise vorzuwalten scheinen *). Sie hat auch deswegen noch vieles für sich, als wir allerdings, je weiter wir unsre Bildung steigern, desto mehr das klar neben einander liegend erblicken, was vorher in dem niedrigern Grad der Bildung hinter einander liegend erschien, und erst aus einander durch Schlüsse abgeleitet werden mußte. Mit dieser Beobachtung analog fortschreitend, ließe sich daher denken, daß die Bildung dergestalt gesteigert seyn könnte, daß wir das, was bey einzelnen Sätzen möglich war, bey allen verwirklicht sehen dürften. Allein, ob dieser Zustand dem Menschen zu erreichen je möglich ist, oder ob er als ausschließendes Eigenthum der Gottheit, für den Menschen nur das Ideal bleiben muß, nach welchem er unaufhörlich strebt, ohne es je erreichen zu können, gleich wie eine krumme Linie einer geraden (ihrer Asymptote) ohne Aufhören sich nähern kann, ohne deswegen je mit ihr zusammenzufallen, vermögen wir nicht zu entscheiden; ja wir müssen am ersteren zweifeln und schätzen das Loos der Menschheit schon schön genug, wenn nur die gedachte Näherung statt findet, weil doch die Linien einander sehr, sehr, unendlich nahe kommen können.

§. 8 a. Dem sey übrigens wie ihm wolle, so ist doch bey dem ersten Anblick zu sehen, daß diese Mathematik von derjenigen, die zum Theil in den Elementen des Euklides ausgesprochen

---

*) Z. B. in der Zahl der Staubfäden der Blumen; in den Richterschen, jetzt wieder angeregten Mischungsverhältnissen ꝛc. ꝛc.

ist, als völlig verschieden gedacht werden muß. Während die eine den Raum und die Zeit in höherer Beziehung betrachtet, hat es die andere mit den Größen des Raumes und der Zeit in der Erscheinung zu thun. Während jene über die Sinnlichkeit hinausgeht, ihre Sätze also nicht mehr von unserm Verstande begriffen, sondern höchstens nur in der Idee erfaßt werden können, bleibt die letztere nur im Bereiche der Sinnlichkeit, nimmt nur das durch die Sinne gegebene zum Gegenstand ihrer Untersuchungen, um solches durch den Verstand zu zergliedern und zu vergleichen. Jene usurpirt daher den Namen der Mathematik, in so fern früher schon die letztere Wissenschaft danach benannt wurde, nur auf eine höchst widerrechtliche Weise, und dürfte denselben baldmöglichst mit dem einer Naturphilosophie vertauschen.

§. 9. Statt daß nun die Mathematiker diesem verderblichen mathematisch-philosophischen Geiste durch eine ächte philosophische Mathematik, d. h. durch eine strenge Absonderung ihrer Wissenschaft von jeder unnützen metaphysischen Spekulation nicht allein, sondern auch durch eine einfache naturgemäße strenge Begründung ihrer Wissenschaft im Bereiche der Sinnlichkeit kräftigen Einhalt hätten thun sollen, und zwar besonders in Deutschland, wo jene Schule sich vorzüglich verbreitet, suchten sie, als sie sich bedroht und gefährdet sahen, durch ein hartnäckiges Festhalten an der Euklidischen Methode sich zu schützen, ohne weiter zu untersuchen, ob solche auch den Anforderungen der Zeit Genüge leiste; und sie glaubten durch ihn gegen jeden gewaltthätigen Eingriff in ihre Rechte um so gesicherter zu seyn, je fester und unbedingter sie an ihm hingen, da alle früher von

den treflichsten Geometern gemachten Versuche, dessen Principien sicherer und fester zu gründen, nicht bloß gänzlich fruchtlos geblieben waren, sondern auch meistens der Geometrie die Einfachheit und Leichtigkeit benahmen, welcher sich die Euklidische erfreut, und wodurch sie selbst zu jeder Zeit über andere von ihr abweichende Systeme erhaben da stand.

§. 10. Allein durch dieses mechanische Festhalten am Alten von Seiten der Deutschen Mathematiker, wurden selbst die Fortschritte, welche die Mathematik mittelst des Kalkuls machte, als gefährliche Neuerungen entweder zum Theil verworfen, oder doch nicht so beachtet, als sie es ihrer unendlichen Wichtigkeit wegen verdienten. Je mehr sich auf der einen Seite z. B. die analytische Geometrie in ihrer großen schönen Allgemeinheit ausbildete, desto mehr suchte man auf der andern Seite durch das Studium der Geometrie der Alten und vorzüglich durch ein desto hartnäckigeres Beybehalten des Euklidischen Ganges für jenes Streben einen Gegensatz zu bilden, welcher gegen das Vorrücken jener Methode ein mächtig aufhaltender Damm seyn oder werden mußte.

§. 11. Diese einseitige Richtung, welche die meisten deutschen Mathematiker in ihren Forschungen nahmen, mußte natürlich in ihrer Fortdauer bewirken, daß alle freie Geistesthätigkeit getödtet, statt belebt wurde, daß der Mathematiker seine größte Ehre darin suchte, nicht anders als Euklidisch zu denken, d. h. nicht zu denken, sobald es eine Sache ausserhalb des Euklidischen Systems betraf, daß ihn alles anekelte, was Philosophie hieß, daß er jeden der mit der Philosophie auf irgend eine Weise in Verbindung stand, als seinen natürlichen Feind betrachtete,

also auch jeden, der nur irgend einen freien, nicht Euklidischen Gedanken laut werden ließ. Die Ausnahmen, die einzelne machten, waren nicht häufig genug, um etwas an diesem allgemein herrschenden pedantischen Unwesen ändern zu können, um so mehr, da die wenigsten derselben wahre Mathematiker waren, die meisten aber nur oberflächliche Kenntniß der Mathematik besaßen und zum Theil von dem Geiste der neuern Philosophie angesteckt, das Wesen der Mathematik gleich bey ihrem ersten Beginnen aus den Augen verlohren hatten.

§. 12. In diesem Zustand befindet sich die Mathematik noch jetzt in Deutschland. Gelähmt, unterdrückt, ohne alle Energie bewegt sich diese Wissenschaft langsam und schwerfällig, ohne daß man nach Jahren irgend ein Fortschreiten derselben bemerken könnte. Leuchteten nicht an dem mathematischen Himmel Deutschlands einzelne glänzende Sterne erster Größe, die zu sichtbar strahlend da stehen, als daß, sie näher zu bezeichnen, nöthig wäre, und die das allgemeine Dunkel, so weit sie reichen, erhellen, so würden wir bald ein Zurücktreten dieser Wissenschaft wahrnehmen, welches in dem Grade auffallen müßte, als unsre Nachbarn, vermöge ihrer praktischen Ansicht fortschreitend, sich über den gegenwärtigen Zustand noch erheben würden. Statt daß der Geist, das Leben in ihr, das Verwandte in dem Menschen anregen, erfassen, zu ihr hinreißen sollte, bewirkt dieser Mangel an freier Bewegung gerade das Gegentheil. Die meisten werden durch die völlig todte, oft in das geistlose ausartende Behandlung der Wissenschaft, gleich in den ersten Augenblicken dergestalt abgeschreckt, daß sie diese erhabenste am meisten anziehende Wissenschaft für trocken ausschreien, ihr

Studium vernachläßigen und sich dadurch selbst die Möglichkeit benehmen, das Leben und den Geist in ihr zu erfassen und fest zu halten. Da noch überdies Deutschland vermöge seiner Lage und Verfassung keinen Antrieb von aussen erzeugt, das Studium der Mathematik lebhafter zu betreiben *), so wird dieses Uebel immer weiter um sich greifen, wenn nicht zeitig Einhalt geschieht, wenn man sich nicht ernstlich damit beschäftigen wird, dieser so tief gesunkenen Wissenschaft neues Leben einzuhauchen.

§. 13. Es bleibt aber noch in Bezug auf Geometrie die Frage zu erörtern: Soll man die analytische Behandlung der Geometrie (und überhaupt der Mathematik) der geometrischen d. h. der Geometrie der Alten vorziehen, oder soll die letztere ihr seit Jahrtausenden wohlerworbenes Vorzugsrecht auch fernerhin behaupten? —

Diese Frage, zwar schon mehreremal in Anregung gebracht, wurde so viel uns bekannt ist, nie unter den gehörigen Beziehungen berücksichtigt. Während auf dem analytischen Wege sich in Frankreich die vorzüglichsten Mathematiker bildeten, während zu derselben Zeit in Deutschland die Mathematik eher zurück als vorwärts schritt, behaupteten die deutschen Euklideaner, daß nur durch die Geometrie der Alten ein wahrer geometrischer Geist geweckt und belebt werden könne. Aber auch umgekehrt ist nicht zu läugnen, daß die bloße analytische Behandlung der gesammten Mathematik auch auf der andern Seite zu einem todten, bloß mecha-

---

*) In Deutschland ist eigentlich die Astronomie das einzige praktische Fach, welches Mathematiker bildet.

nischen Verfahren führen muß, weil die allgemeinen Regeln, die der Kalkul vorschreibt, immer dieselben bleibend, dem Geiste viel zu wenig Feld seiner Thätigkeit übrig lassen. Wenn dieser Fall bis jetzt noch nicht eintrat, so kam es daher, daß sich die Wissenschaft auf dieser Seite erst zu bilden begann, daher einem Jeden in ihrem Entstehen Stoff genug darbot, seine Geistesthätigkeit auf ihre weitere Ausbildung zu verwenden, auch wohl mit daher, daß diese Allgemeinheit der Betrachtungen ein Vordringen möglich macht, welches in einem jeden, einmal Eingeweihten, täglich neuen Reitz zu weitern Forschungen erzeugt.

§. 14. Obige Frage scheint daher, wenn sie gehörig beantwortet werden soll, so gestellt werden zu müssen, nehmlich: „Unter welchen „Verhältnissen muß die Geometrie der Alten, unter welchen aber die analytische Behandlung der „Geometrie vorgezogen werden?" —

Hierauf erwiedern wir:

Auf Schulen, deren Zweck eine harmonische Ausbildung aller Kräfte des Schülers seyn muß, und bey welchen der Zweck durch jeden zu betreibenden Gegenstand erreicht werden soll, wäre es diesem höchst zuwiderlaufend, wenn man bey dem mathematischen Unterricht den Kalkul vorherrschen lassen wollte. Der Schüler auf der niedrigsten Stufe seiner Bildung, hängt bloß noch am Sinnlichen und der Zweck des Unterrichts muß seyn, ihn allmählig davon loszureissen, ihn vom Besondern zum Allgemeinen zu erheben. Die Geometrie der Alten, deren Gegenstand der Raum (als gegeben betrachtet) sinnlicher Natur ist und welche die sinnliche Anschauung bey jedem einzelnen ihrer Sätze immer auf's neue in Anspruch nimmt, deren Sätze selbst aber doch

rein geistig sind, die also in die Sinnlichkeit und in das Geistige des Menschen gleichmäßig und von allem fremden abgesondert eingreift, muß daher das geeignetste Mittel seyn, den Uebergang vom Sinnlichen zu dem Geistigen zu bahnen. In dieser Hinsicht ist sie daher nicht nur dem Kalkul voranzusetzen, sondern auch als das vorzüglichste Mittel der Geistesbildung überhaupt auf Schulen zu betrachten, so das andere Unterrichtsgegenstände immer mehr auf Ausbildung anderer Kräfte des Menschen hinzusehen haben.

§. 15. Nicht minder unzweckmäßig wäre es aber, wenn man den Kalkul gänzlich vernachlässigen wollte. Auch er ist ein wichtiges Mittel der Geistesbildung, wenn auch erst in der Hand des schon auf einer gewissen Stufe der Bildung stehenden Schülers. Er ist schon deswegen nicht zu vernachlässigen, sondern zu seiner Zeit in gehörigem Umfange zu betreiben, einmal weil das materielle der Wissenschaft Nebenzweck ihrer Behandlung ist und seyn muß, also gehörig erlernt werden muß, dann aber insbesondere weil eine so viel wie möglich allseitige Behandlung eines Gegenstandes und besonders der Mathematik, einen Ueberblick des Ganzen gewährt, der allein erst den Schüler zu der gehörigen Allgemeinheit der Ansicht, und dadurch seine Ausbildung zu der gehörigen Höhe, zu bringen vermag.

§. 16. Ist aber nicht die Ausbildung des Menschen, sondern vorzüglich die Wissenschaft selbst der Zweck ihrer Behandlung, (wie dies bey dem Mathematiker von Profession der Fall seyn muß) so bekommt der Kalkul ohnstreitig das vollkommenste Uebergewicht. Die Wissenschaft muß immer nach dem höchsten und allgemeinsten Standpunkt streben und nimmt ohne Bedenken

dasjenige Mittel, was sie ihrem Zwecke am schnellsten zu nähern im Stande ist. Und dies Mittel ist der Kalkul. Mit einer Allgemeinheit und mit Blitzesschnelle dringt er in das innerste Heiligthum des Wissens unaufhaltsam vor, und leistet oft in einem Atom der Zeit, was ein tausendjähriges Studium der Geometrie der Alten nicht zu leisten vermag. Daher sich der Mathematiker um seine Wissenschaft kaum ein größeres Verdienst erwerben kann, als wenn er den Kalkul durch neue Methoden noch zu bereichern versucht. Daher auch der gesunkene Zustand der Mathematik in Deutschland, weil unsre Mathematiker statt diesen Weg verfolgend, die Wissenschaft auf die möglichste Höhe zu schwingen, sich zu ausschließend und zu hartnäckig mit der Geometrie der Alten beschäftigt haben, die zwar gute geometrische Denker, aber nicht große Mathematiker zu bilden im Stande ist.

§. 17. Wenn wir aber die Geometrie der Alten als ein so vorzügliches und unentbehrliches Hülfsmittel ansehen müssen zur Bildung des Geistes (also auch zur ersten Bildung des Mathematikers von Profession), wenn wir behaupten, daß diese Geometrie ein vorzüglicher Theil des Schulunterrichts seyn und werden muß, so sind wir nicht gemeint, und können nicht gemeint seyn, daß gerade die Geometrie des Euklides ohne alle Abänderungen vorgetragen werden müsse. Ausser den bedeutenden Mängeln, die diese Methode für den Unterricht hat, und die wir gerade hier nicht bloß aufzuzählen, sondern auch zu beseitigen Willens sind, spricht ja auch die Erfahrung laut dagegen. Gerade in den Schulen Deutschlands wird die Geometrie des Euklides, entweder nach ihm selbst, oder nach einem seiner Nachfolger, am vorzüglichsten betrie-

ben, und was ist der Erfolg dieses Treibens bis jetzt gewesen? —

Allgemeiner Ekel vor diesem Unterricht, fast gänzlicher Mangel an Wissenschaftlichkeit, bey denen, die auf der Universität für den Staat, für die Welt sich ausbilden wollen oder sollen, welches Uebel vorzüglich durch den Ekel erzeugt wird, den der Schüler vor dem einzigen rein wissenschaftlichen Gegenstand, der gewöhnlich auf Schulen getrieben wird, durch diese Methode des Unterrichts bekommen hat. Allgemeine Furcht vor der Trockenheit der Mathematik, die dabey — gut oder schlimm für die Mathematiker — mit einer Ehrfurcht gegen denjenigen verbunden ist, welcher der allgemeinen Meinung nach, diese Trockenheit zu überwinden fähig war und wirklich Fortschritte in der Wissenschaft machte. *)

§. 18. Betrachten wir aber den andern Theil der Mathematik, die Arithmetik im allgemeinen Sinne des Wortes, so müssen wir bey dem ersten Blick einräumen, daß, bedarf die Geometrie einer Reform, dann die Arithmetik um so vielmehr einer gänzlichen und unbedingten unterworfen werden müsse. Ja wir möchten behaupten, daß gar nichts von ihr beybehalten werden dürfe, als ihre praktischen Methoden, die sich bis jetzt nach unserm schon oben besproche-

---

*) Wir sagen, daß dieses der Erfolg im Allgemeinen sey, ohne in Abrede zu stellen, daß nicht doch einzelne Mathematiker auf diesem Wege gebildet wurden. Diese Einzelnen beweisen aber nichts dagegen; der Erfolg des mathematischen Unterrichts muß in eben dem Verhältniß allgemein günstig seyn in welchem man solches von dem Sprach-Unterricht oder von irgend einem andern verlangt.

nen allgemeinen Probestein berichtigen oder bestätigen ließen, indem die ganze Wissenschaft, so wie sie zur Zeit besteht, einem Schutthaufen gleicht, in welchem brauchbares und unbrauchbares, gleichartiges und absolut getrenntes in wahrhaft chaotischer Gestalt, so wie der Zufall das einzelne herbeyführte, mit einander in erzwungener Vereinigung sich darstellt. So wie aber in dem Schutthaufen selbst das brauchbare, so wie es ist, zu einem neuen, schönen, geregelten und wohlgefälligen Gebäude nicht benutzt werden kann, sondern zuvor erst herausgezogen gereinigt, verändert, behauen und zugerichtet werden muß, so geht es auch mit den zusammengeworfenen Theilen und Einzelnheiten der Arithmetik (in dem allgemeinen Sinne des Worts). Auch hier muß, wenn sie zu einem wissenschaftlichen Gebäude heranwachsen soll, das unbrauchbare abgeschieden, das einzelne brauchbare aber selbst erst in eine neue, dem Gebäude angemessene, von der vorigen öfters völlig abgeschiedene Gestalt gebracht werden, ehe wir (Analytiker) sagen können, daß wir eine Wissenschaft und nicht ein bloßes Handwerk betreiben.

§. 19. Unablässig damit beschäftigt diesem Uebel aus allen Kräften und auf alle Weise entgegen zu arbeiten und wo möglich abzuhelfen, ist es mir gelungen, die ersten Elemente der Geometrie mit einer solchen Einfachheit, Klarheit und Strenge zu entwickeln, wie es meiner Ansicht gemäß möglich seyn mußte. Ich arbeitete danach ein System meiner Wissenschaft aus und übergab solches dem Publikum unter dem Titel: (Geometrie und Trigonometrie für die Schulen und Universitäten Deutschlands. Berlin 1819.)

§. 20. Indem ich aber in einer meiner frü-

dern Schriften die einzig wahren Ansichten des Kalkuls mit aufnahm, ohne jedoch das ganze Gebäude in rein wissenschaftlicher Form aufzustellen, weil das Werkchen noch zu andern Zwekken dienen sollte, die sich nicht damit vertrugen; indem ich darauf gründen zu können glaubte, daß die Mathematiker Deutschlands, denen die Schrift zunächst in die Hände fallen mußte, die Idee auffassen und die Wichtigkeit derselben beherzigen würden, machte ich bis jetzt die Erfahrung, daß meine Hoffnungen in Bezug auf die Verbesserung dieser sogenannten Wissenschaft durch andere, auf zu seichtem Grunde gebaut seyn müssen. Ich habe mich daher überzeugt, daß erst alles vorhandene gänzlich umgestürzt seyn müsse, ehe man erwarten kann, daß bey dem Wiederaufbauen die Festigkeit des Gebäudes und eine bessere, zweckgemäßere Einrichtung berücksichtigt werden würde. Deshalb habe ich es mir nun in diesen Bogen zum Zweck gesetzt, mit ächt mathematischer Strenge zu beweisen:

1) daß die Methode des Euklides, wegen der verworrenen, gänzlich unwissenschaftlichen und ungenügenden Behandlung der erstern Elemente, für den Unterricht absolut schädlich und verwerflich sey; *)

2) daß

---

*) Man bemerke, wie ich mich von allen frühern Gegnern des Euklides wesentlich unterscheide. Jene griffen meist alle nur die Grundprincipien an, d. h. sie beschäftigten sich eigentlich bloß mit dem, was der Mathematiker dem Philosophen überlassen muß. Ich aber, ohnerachtet ich unten meine Ansichten auch hierüber mittheilen werde, habe bloß zur Absicht, den ächt mathematischen Theil, in Bezug auf die Bestimmt-

2) Daß wir zur Zeit kein Lehrbuch der Geometrie besitzen, welches den nothwendigen und unerläßlichen Forderungen an dasselbe entspricht.
3) Daß unsere Arithmetik, Algebra und was darauf gegründet ist, kaum der Schatten einer Wissenschaft, sondern vielmehr ein Chaos von durch einander geworfenen, fremdartigen, ohne alle Verbindung da stehenden, ganz grundlosen und meist unrichtigen Behauptungen zu nennen ist.

§. 21. Um nun zu unserm erstern Zweck zu gelangen, müssen wir vor allen Dingen den Gegenstand der Geometrie bestimmt herausheben, um uns dadurch vor fremder Anmaßung der Rechte des Geometers sicher zu stellen. Wir stellen daher folgende Difinition der Wissenschaft auf.

Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche die Vergleichung der Raumgrößen zum Gegenstande hat, unter der Voraussetzung, daß uns der Raum und mit ihm die verschiedenen Richtungen, seine drey Dimensionen, mithin auch die Linie, die Fläche, der Körper, ferner das Geradseyn und das Krummseyn der Linien, als Elemente die keiner weitern Zergliederung fähig, unbedingt gegeben sind, und daß man unter

---

heit, Klarheit, Anschaulichkeit und Strenge der Sätze und der Beweise anzuareifen. Jene konnten an ihm zwar ändern, aber absolut nichts verbessern, in so fern dieser Theil, wegen der Stetigkeit des Raumes und der von dieser Stetigkeit heterogenen Zahl als des Vergleichungsmittels, welches uns, in unsern Untersuchungen über den Raum selbst auf Zeit und Raum beschränkt, als unvollkommenes vergönnt ist, nothwendig immer denselben Schwierigkeiten unterworfen seyn wird.

Raumgröße jede zwischen bestimmten Grenzen enthaltene Linie, Fläche oder Körper verstehe.

Aus dieser Definition folgt sogleich, daß wer sich mit der Nachweisung der Möglichkeit irgend eines der hier als gegeben angenommenen Elemente beschäftigt, nicht Geometrie treibe, sondern eine von dieser gänzlich abgeschiedene Wissenschaft, die in das Gebiet der Philosophie gehört.

§. 22. Ferner geht hervor:

1) Die Geometrie bleibt immer im Gebiete der Erscheinungen, so daß nur anzugeben ist, wie uns die als gegeben angenommenen Elemente erscheinen, um dann unmittelbar darauf weiter bauen zu können. *)
2) Die krumme und die gerade Linie sind spezifisch verschieden und keine aus der andern zu erklären.
3) Der Raum ist unendlich theilbar; denn er erscheint uns als stetig, d. h. als nirgends natürliche Grenzen habend; deswegen müssen wir uns auch den Raum als einen unendlichen Raum denken.
4) Ein Punkt ist weder ein Theil des Raumes, noch eine Raumgröße, sondern nichts weiter als die Grenze in der Linie, d. h. der Ort im Raume, von welchem eine Begrenzung einer Raumgröße ausgeht. Die Linie besteht daher nicht aus an einander gereihten Punkten,

---

*) Die Geometrie ist in dieser Hinsicht nur subjektiv, wird aber in so fern zur allgemeinen, als diese Elemente allen Menschen gleichmäßig erscheinen. Für den indessen, dem diese Dinge anders erscheinen sollten, als sie unsers Wissens nach dem Menschen im allgemeinen erscheinen, giebt es natürlich auch keine Geometrie.

ohnerachtet wegen ihrer beliebigen Theilbarkeit, überall in ihr Punkte, d. h. Grenzen, gedacht und angenommen werden können.

§. 23. Ist daher festgesetzt, wie uns diese als gegeben angenommenen Elemente erscheinen, so sind dies die Grundsätze (Axiomata), unter deren Voraussetzung alle übrigen Sätze nur Gültigkeit haben.

Hieraus folgt:

1) Jeder Satz hat für uns strenge Gültigkeit, der auf die gedachten Grundsätze unmittelbar oder mittelbar zurückgeführt ist.

2) Die ganze Wissenschaft ist daher für uns völlig streng, sobald sie ihre Sätze in ein solches System aufstellt, das ein jeder aus den vorhergehenden und die letzten in der Reihe aus den Grundsätzen abgeleitet werden können.

3) Die Geometrie dagegen ist nicht strenge, die ausser diesen Grundsätzen noch andere Sätze als Grundsätze aufstellt, sie ist noch überdies keine reine Wissenschaft, sobald diese andern Sätze andere Begriffe, als die sich unmittelbar aus der Betrachtung der Raumgrößen ergeben, in sich enthalten.

4) Sind noch ausserdem die aufgestellten Begriffe nicht völlig klar und anschaulich, sondern zum Theil oder gänzlich unbestimmt, so daß statt systematischer Strenge, bloß Unbestimmtheit, d. h. Willkühr herrscht, so verdient die Geometrie gar nicht den Namen einer Wissenschaft, geschweige den einer reinen und strengen.

Daher endlich:

5) die Geometrie des Euklides weder eine strenge Wissenschaft, noch überhaupt eine Wissenschaft zu nennen ist.

§. 24. Die letzte Folgerung hoffen wir nun auf

das einfachste und auf die überzeugendste Weise auseinander setzen zu können, indem wir den Euklid selbst zur Hand nehmen. *)

Ohne uns bey den erstern Definitionen aufzuhalten, die auch schon nicht alle bestimmt genug sind, betrachten wir sogleich die folgende etwas näher. Sie heißt: „Ein ebener Winkel ist die Neigung zweyer in einer Ebene zusammenstoßender (und nicht in eine Richtung fallender) Linien." Diese Definition ist auf eine so unbegreifliche Weise unbestimmt, daß diese Unbestimmtheit allein schon hinreichend wäre, die Richtigkeit unsrer Behauptung darzuthun. Was ist denn darunter zu verstehen wenn es heißt: Ein Winkel ist die Neigung zweyer Linien? Es ist doch von größern und kleinern Winkeln die Rede; also muß der Winkel eine Größe seyn. Ist er aber die Neigung zweyer Linien, so ist die Neigung eine Größe. Da nun eine Neigung keine Raumgröße ist, indem es nur 3 Arten von Raumgrößen giebt, nehmlich Linien, Flächen und Körper, so ist der Winkel zwar eine Größe, aber keine Raum-Größe. Dürfen aber in der Geometrie, wenn sie eine reine für sich bestehende und von fremden Theilen abgesonderte Wissenschaft seyn soll, ausser den Raumgrößen noch Größen anderer Art und noch dazu so unbestimmte, wie Neigungen sind, vorkommen?

---

*) Ich muß hier bemerken, daß ich keine andere Ausgabe zur Hand habe, als die von Barrow. London cIↄIↄcLIX; auch in der Abgeschiedenheit von beinahe aller Literatur, in der ich mich zur Zeit noch befinde, keine andere für den Augenblick haben kann. Es thut indeß hier nichts zur Sache, da dasjenige was ich heraushebe, in allen Ausgaben auf dieselbe Weise zu finden ist.

Und da der Begriff der Neigung nie ein klarer Begriff werden kann, wie kann man hoffen, daß die auf ihn gegründeten Sätze klar und anschaulich werden sollen? — Ferner ist es völlig unwissenschaftlich, wenn die Begriffe größerer Winkel, kleinerer Winkel vorkommen, ohne daß irgendwo eine Erklärung derselben zu finden ist. Wie kann man behaupten und mit Klarheit bebeweisen, daß ein Winkel größer ist, als ein anderer, so lange man nicht bestimmt weiß was man eigentlich behauptet habe! Oder soll aus dem Begriff „Neigung" der Begriff „größere „Neigung, kleinere Neigung" von sich selber erhellen? Geben diese nicht an und für sich gerade das Gegentheil an die Hand von dem, was man doch wirklich unter einem größeren und kleinern Winkel, wenn auch nur dunkel, sich vorstellt? Und wenn Nachfolger des Euklides, diesen Uebelstand einsehend, Abweichung statt Neigung gesetzt haben, ist dadurch der Begriff klarer geworden?

§. 25. Und wenn man in der Folge unter den Grundsätzen trifft:

1) Was einem und demselben gleich ist, ist auch unter sich gleich.
2) Wenn zu gleichem gleiches hinzugefügt oder von gleichem gleiches hinweggenommen wird, so sind auch die Resultate gleich.
3) Wenn zu ungleichem gleiches hinzugefügt wird, oder von ungleichem gleiches hinweggenommen, so sind auch die Resultate ungleich, u. d. gl. m.; so muß man sich doch fragen: von was ist hier die Rede? Von Größen überhaupt, oder von Raumgrößen insbesondre? — Ist von Größen überhaupt die Rede, so dürfen diese Sätze nicht als Grundsätze der Geometrie gelten, oder die Geometrie ist von einer andern

Wissenschaft noch abhängig, nicht rein für sich bestehend; und dann müssen wir auf die so gerühmte Evidenz der Geometrie gänzlich Verzicht leisten, so lange nicht jene Wissenschaft auf die sie gegründet, erst anschaulich genug entwickelt, und die Sätze, die hier als Grundsätze aufgestellt sind, erst gehörig erwiesen seyn werden. Und dies möchte nicht leicht ausführbar, ja selbst unmöglich seyn. Die Geometrie ist ja gerade deswegen der Anschaulichkeit ihrer Sätze so besonders fähig, weil sie es bloß mit einem unmittelbar in die Sinne fallenden Gegenstand zu thun hat. Wo bleibt aber diese Anschaulichkeit bey jenen allgemeinern Sätzen, die sich auf keinen besondern Gegenstand, sondern schon auf einen durch Abstraktion gewonnenen Begriff (der Größe im allgemeinen) beziehen?

§. 26. Ist aber bey obigen Grundsätzen nur von Raumgrößen die Rede, so dürfen sie erstlich nicht für Winkel angewandt werden, da Winkel als Neigungen unter keiner Rubrik der Raumgrößen stehen. Zweytens aber dürfen sie dann überhaupt nicht als Grundsätze aufgestellt werden, da, wenn die Wissenschaft strenge seyn soll, ausser der Annahme der oben erwähnten als gegeben betrachteten Elemente, keine weitere Grundsätze mehr statt finden können, sondern alle als Lehrsätze auf die erstern zurückgebracht werden müssen. Wer bürgt uns denn dafür, daß wenn ein Dreyeck einem Kreise, und dieser Kreis wieder einem Viereck gleich ist, dann auch das Dreyeck dem Viereck gleich seyn müsse? Viele andere Sätze, z. B. der Satz der Parallelen, dann, daß in einem Dreyeck gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüberstehen, und dgl. m. sind eben so einleuchtend, wo nicht noch

mehr als jener. Kann man also jenen als Grundsatz aufstellen, warum denn nicht auch diese? — Daher kommt es auch, daß es manchem Lehrer, der nach Euklidischer Methode unterrichtet, weit schwerer fällt, dem Schüler begreiflich zu machen, daß ein gegebener Satz eines Beweises bedarf, als es Mühe kostet, ihm den gedachten Beweis selbst beyzubringen. Ja, ist der Schüler hartnäckig genug, so muß es dem Lehrer unmöglich werden, ihn von der Nothwendigkeit des Beweises zu überzeugen, da der Schüler alsdann mit demselben Rechte auch von jenen sogenannten Grundsätzen die Beweise fordern kann.

§. 27. Ferner trifft man von der Congruenz zwar eine Definition, die der Gleichheit der Raumgrößen sucht man aber vergebens. Die Gleichheit ist doch von der Congruenz verschieden, und bedarf also nothwendig einer genauen Bestimmung, wenn man irgend etwas von Gleichheit behaupten will und das Behauptete mit Klarheit erwiesen werden soll. Bey den neuern Geometern findet man zwar die Erklärung: „Gleich ist dasjenige, was einerley Quantität hat.“ Aber da muß man wieder fragen: was ist denn Quantität? Ist dies nicht ein eben so unbestimmter Begriff? Uns scheint es nichts anders gesagt zu seyn, als: „Gleich ist, was gleich ist.“ Was soll aus der so gerühmten Evidenz der Geometrie werden, wenn ihre Sätze auf so schwankenden nicht erklärten Begriffen beruhen? —

§. 28. Dasselbe ist es, wenn die Geometer der neuern Zeit noch den Begriff der Aehnlichkeit eingeführt haben, indem sie sagen: „Aehnlich ist was einerley Qualität hat.“ Und wenn daher überhaupt alle folgenden Geometer, mit wenigen Ausnahmen, die angeführten Begriffe des Eu-

klides mehr oder weniger beybehalten, manche auch noch mehr ähnliche, dem Wesen der Geometrie widersprechende Begriffe hinzugefügt haben, wenn die wenigen, die von dem Euklides gänzlich abweichen zu müssen glaubten, schlechteres an die Stelle des Alten gesetzt haben, ist es dann ein Wunder, daß bey einer solchen Inkonsequenz des Vortrags, der Geist durch die Willkührlichkeit in den erstern Elementen schon abgestumpft und getödtet wird, noch ehe er nur dahin gelangt, wo, die vorhergehenden Sätze als gegeben angenommen, die Beweise der folgenden aus den vorhergehenden einen strengern, wissenschaftlichern Charakter anzunehmen beginnen. Der wirkliche, oben schon besprochene Erfolg dieses Unterrichts, ist ein so natürlicher, daß man sich eigentlich wundern müßte, wenn er anders wäre. Nur den wenigen, die Muth, Kraft oder Geduld genug haben, um sich nicht in der erstern Zeit dieses Unterrichts abschrecken zu lassen, sondern trotz aller dieser Hindernisse doch durchzudringen versuchen, kann es gelingen, irgend etwas in dieser Wissenschaft zu leisten, und für diese selbst bleibt es noch immer ein unersetzlicher Verlust, mehrere Jahre zur Ueberwindung der Schwierigkeiten verschwendet zu haben, die sie unter günstigern Umständen zum schnellen und sichern Weiterdringen im Gebiete der Wissenschaft hätten verwenden können.

§. 29. Wir würden aber gegen die Vertheidiger der Euklidischen Methode wenig gewonnen haben, wenn wir uns bloß mit Angabe der vorhin gerügten und ähnlicher Mängel begnügten, ohne zugleich auch zu zeigen, auf welche Weise das an sich unschätzbare Werk des Euklides umgeformt werden müsse, um allen Wünschen und Forderungen, die man an die Geome-

trie als Wissenschaft machen muß, auf die einfachste und befriedigendste Weise zu entsprechen. Daher hier die ersten Principien unsrer Geometrie.

§. 30. Die Geometrie, die es unter den obigen Voraussetzungen, mit der Vergleichung der Raumgrößen zu thun hat, kann entweder die Lehre der Größen im allgemeinen voraussetzen und sich als besondere Lehre aus jener ableiten lassen, oder sie entwickelt sich unabhängig von jener allgemeinen Größenlehre in und aus sich selbst. Nur in dem letztern Falle geht sie in den vorherrschenden Geist der Geometrie der Alten ein, und es soll daher hier nur dieser letzte Fall näher beleuchtet werden.

§. 31. Wenn die Geometrie sich rein in und aus sich selbst entwickeln soll, so, daß sie als eine besondere zwar, aber völlig rein abgesonderte, für sich bestehende Lehre erscheint, so muß sie jede der 3 Arten der Raumgrößen, die Linie, die Fläche, den Körper, besonders betrachten, weil, was allgemein von allen Raumgrößen behauptet wird, schon eine Vereinigung der Begriffe unter einem allgemeinen erfordert, welche Vereinigung der zu bezweckenden Anschaulichkeit entgegen steht.

§. 32. Betrachtet man nun zuvörderst die Linien, so muß vor allem erklärt werden, was man unter gleichen Linien und unter ungleichen zu verstehen habe.

1) Zwey Linien sind congruent, wenn bey dem Aufeinanderlegen derselben, kein Punkt der einen außerhalb der andern fällt. — Congruente Linien nennt man auch gleiche.

2) Eine Linie ist größer als eine zweyte, die zweyte dagegen kleiner als die erste, wenn die Linien, nachdem sie mit einem ihrer End-

punkte aufeinander gelegt worden sind, nicht mit ihrem zweyten Endpunkte auf einander zu liegen kommen, während doch kein Punkt der zweyten Linie außerhalb der ersteren liegt.

§. 33. Die Sätze:

1) Wenn $a = b$ und $b = c$
so ist auch $a = c$.

2) Wenn $a > b$ und $b = c$
so ist auch $a > c$.

3) Wenn $a > b$ und $b > c$
so ist auch $a > c$.

können nun für Linien durch Aufeinanderlegen unmittelbar mit der größten Evidenz bewiesen werden.

§. 34. Die Summe oder die Differenz zweyer Linien nennen wir diejenige Linie, welche entsteht, wenn die beyden Linien mit einem ihrer Endpunkte auf einander, sie selbst aber entweder neben einander oder auf einander gelegt werden.

§. 35. Ist dieser Begriff festgesetzt, so lassen sich die Sätze:

1) Wenn $a = b$ und $c = d$ ist,
so ist auch $a + c = b + d$

2) auch $a - c = b - d$

3) Wenn $a > b$ und $c = d$ ist,
so ist auch $a + c > b + d$

4) auch $a - c > b - d$

5) Wenn $a = b$ und $c > d$ ist,
so ist $a - c < b - d$

6) Wenn $a > b$ und $c > d$ ist,
so ist auch $a + c > b + d$

7) Wenn $a > b$ und $c < d$ ist,
so ist auch $a - c > b - d$.

unmittelbar durch Aufeinanderlegen mit derselben Evidenz nachweisen.

§. 36. Einen der zwey, drey, vier und mehr gleichen Summanden einer Summe nennen wir

die Hälfte, das Drittheil, Viertheil ꝛc., den vielten Theil der Summe; diese aber das Doppelte, Dreyfache, Vierfache ꝛc. Vielfache des Summanden.

Die Sätze, die sich hieraus ergeben, bedürfen wohl keiner weitern Rechtfertigung.

Dabey kann man noch bemerken, daß bey der Vergleichung der Raumgrößen Zahlen vorkommen müssen, aber absolut keine Zahlenlehre (Arithmetik).

§. 37. Geht man nun von den Linien zu den Flächen über, so muß man zuerst die nur von zwey Seiten begrenzten Flächen, dann aber die von drey Seiten, ferner auch die von vier und mehr Seiten begrenzten in Betrachtung ziehen.

Einen Winkel nennen wir die von zwey geraden Linien begrenzte Ebene, die auf der dritten Seite noch gänzlich unbegrenzt ist.

§. 38. Hier hören wir uns schon von unsern Gegnern triumphirend zurufen und fragen: „Ist diese Idee neu? Hat nicht schon Schultz „eine ähnliche Erklärung vom Winkel gegeben? „Hat nicht vor kurzem erst Crelle (doch wie er „sagt, ohne von der Schultzischen Ansicht etwas „gewußt zu haben) dieselbe wieder in Anregung „gebracht? Ist aber nicht schon längst, und selbst „für den Vertheidiger jener Theorie überzeugend „dargethan worden, wie unzulässig diese Erklä„rung ist? Die Geometrie ist eine Wissenschaft „der Anschauung, und wehe ihr, wenn ihre Sätze „auf so schwankendem Grunde gebaut sind, als „dies der Fall ist, wenn unendlich große Grö„ßen in ihr eingeführt werden. Mußte nicht so„gar Schultz das ganze, selbst unendlich große „Stück der Fläche zwischen den Parallelen, als „gegen unendlich große Winkelfläche verschwin-

„hend annehmen, wenn er sich nicht in Widersprüche verwickelt sehen wollte? Und wer giebt „uns die Ueberzeugung von der Richtigkeit einer „Annahme, die an sich so wenig einleuchtend „ist? — — — u. s. w. f."

§. 39. Und wir antworten:

Allerdings haben Schultz und seine Anhänger bey Aufstellung jener Theorie gefehlt, indem sie die allgemeinen Sätze der Größen, wie sie vorausgeschickt und auf die Geometrie dann angewandt werden, für diese Winkelflächen gelten ließen, während jene Sätze für uns nur so lange überzeugende Kraft haben, als die Größen selbst sogenannte endliche Größen sind. Ueber die Gleichheit (das Wort in dem Sinne genommen, wie man es gewöhnlich nimmt, d. h. einerlei Quantität habend) nicht völlig begrenzter oder sogenannter unendlicher Größen, läßt sich absolut nichts sagen. Wie kann man sagen wollen, daß die Quantität zweyer Größen, einerley oder verschieden sey, da die Quantität selbst, bey nicht völlig begrenzten Räumen, ein absolut nicht zu bestimmendes Ding ist und bleibt. Zeugt aber dies gegen unsre Definition des Winkels oder nicht vielmehr gegen das unschickliche, unwissenschaftliche Verfahren der Geometer, die sich nicht bloß erlauben die Geometrie als Anschauungswissenschaft mit ihr ganz fremden nicht anschaulichen Sätzen zu begründen, sondern auch so weit gehen, diese Sätze für einen Fall gelten zu lassen, wo die Bedingung, unter welcher allein sie nur als richtig anerkannt werden können, gar nicht erfüllt ist?? — — Warum hat man übersehen, daß die Deckung (Congruenz) die einzige Grundursache der Anschaulichkeit (Evidenz) der geometrischen Sätze seyn kann, und daß daher diese Evidenz gänzlich fehlen muß, sobald man

irgend ein anderes Princip statt des erwähnten unterschiebt.

§. 40. Wir werden nun sehen, wie die Lehre der Winkel ächt geometrisch, streng und evident aus unserm aufgestellten Begriff des Winkels sich wird ableiten lassen.

Zu dem Ende müssen zunächst noch folgende Definitionen vorgebracht werden.

1) Ein Winkel ist die von zwey zusammenstoßenden geraden Linien begrenzte Ebene, die auf der dritten Seite völlig unbegrenzt ist. (Die Schenkel des Winkels sind daher auch nur auf einer Seite begrenzt, auf der andern aber unbegrenzt.)

2) Congruente Winkel nennen wir diejenigen Winkel, die selbst und zugleich mit ihren beyden Schenkeln aufeinander fallen können. Congruente Winkel nennt man auch gleiche Winkel.

3) Ein Winkel ist größer als ein anderer, und dieser andere dann kleiner als jener erste, wenn, nachdem ihre Spitze und ihr einer Schenkel und sie selbst aufeinander gelegt sind, der andere Schenkel des erstern Winkels außerhalb des andern Winkels fällt.

4) Ein Winkel heißt ein flacher, wenn die beyden zusammenstoßenden Linien in eine gerade Linie fallen. Erhabene, hohle Winkel.

5) Summe, Differenz zweyer Winkel ist derjenige Winkel der entsteht, wenn man die Spitze und einen Schenkel des einen auf die Spitze und den einen Schenkel des andern legt und sie selbst im erstern Fall nebeneinander oder im andern Fall aufeinander.

6) Einer der zwey, drey, vier und mehr gleichen Summanden einer Summe, heißt die Hälfte, das Drittheil, Viertheil rc. der

vielte Theil der Summe; diese aber das Doppelte, Dreyfache, Vierfache &c. Vielfache des Summanden.

§. 41. Die (§. 33 und §. 35) aufgestellten Sätze der Gleichheit und der Ungleichheit, der Summen und der Differenzen, können nun durch Aufeinanderlegen der in Rede stehenden Winkel aus den vorstehenden Begriffen unmittelbar und mit einer Klarheit, Strenge und Evidenz erwiesen werden, wie sie absolut auf keinem andern Wege erreicht werden kann *).

§. 42. Aus diesen Sätzen lassen sich dann unmittelbar eine unzählige Menge besonderer Fälle ableiten, die alle unter den gedachten als den allgemeinen enthalten sind. Unter den vielen wollen wir bloß anführen:

1) Wenn die Hälften zweyer Winkel gleich oder ungleich sind, so sind es auch die ganzen.
2) Wenn zwey Winkel gleich oder ungleich sind, so sind es auch ihre Hälften.
3) Alle flachen Winkel sind einander gleich, (weil sie unmittelbar aus dem Grundsatz, daß zwey Linien nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, dem aufgestellten Begriff der Gleichheit der Winkel Genüge leisten).
4) Alle rechte Winkel (als Hälften der flachen) sind daher auch einander gleich.
5) Scheitelwinkel (als Differenzen, deren Mi-

*) Es versteht sich, daß in den angeführten Sätzen die Buchstaben a, b, c, d dort Linien, hier Winkel bezeichnen sollen; ferner daß die Zeichen + und — die dort und hier gebraucht sind, dort unsrer Summe und unsrer Differenz der Linien, hier aber unsrer Summe und unsrer Differenz der Winkel entsprechen sollen; daß man also auf keinen Fall sich arithmetische Operationen darunter zu denken habe.

nuenden gleiche (flache) Winkel sind, deren Subtrahend aber gemeinschaftlich ist), sind einander gleich.

6) Auch umgekehrt: sind je zwey gegenüber stehende Winkel einander gleich, so bilden ihre vier Schenkel zwey gerade Linien; (denn es ist die Summe der Winkel auf der einen Seite eines jeden Paar Linien gleich der Summe der Winkel auf der andern Seite, folglich jede Summe einem flachen Winkel gleich) *) u. s. w. f.

§. 43. Hinsichtlich des berühmten oder berüchtigten Axioms des Euklides, die Parallelentheorie betreffend, brauchen wir zu dem, was über seine Unstatthaftigkeit schon gesagt ist, nichts weiter hinzuzufügen. Wenn wir auch diese Theorie nicht bündiger darstellen könnten, als dies von Euklides geschehen, so würde dies nichts gegen uns beweisen, da unser ganzes übriges System als das einfachste und klarste dennoch feststehen würde? — Allein auch hier hoffen wir mehr noch als Euklides zu leisten.

Zu dem Ende stellen wir vier, die ganze Parallelentheorie in sich enthaltende Sätze auf, die wir dann in ihrer Folge erweisen wollen.

---

*) Würdigt man die beyspiellose Einfachheit dieser Ableitungen, verbunden mit ihrer höchsten und strengsten Evidenz gehörig, so wird, wer unbefangen genug ist, bloß das Wahre und Gute zu wollen, auch wenn dies durch eine Neuerung erzielt worden wäre, gewiß sehr begreiflich finden, wie ein Unterricht in diesem Geiste dem Lehrer und Schüler gleichmäßig Freude machen muß; dem Schüler weil er sich gleich im ersten Augenblick zum Selbsterfinden der Beweise geschickt findet, dem Lehrer, wegen der erstaunlichen Schnelligkeit der Fortschritte, die dadurch bewirkt wird.

1) Sind die äußern Winkel den innern gleich, so schneiden sich die Linien nie.

2) Schneiden sich zwey Linien nie, werden sie aber durch eine beliebige dritte Linie geschnitten, so sind die äußern Winkel den innern gleich.

3) Sind die äußern Winkel oben größer als die innern, so schneiden sich die Linien oben *).

4) Schneiden sich zwey Linien oben, so sind oben die äußern Winkel größer als die innern.

Beweise.

§. 44. I. Wegen der Gleichheit der äußern und innern Winkel sind auch die Wechselwinkel einander gleich. Denkt man sich daher den untern Theil der Figur auf den obern gelegt, so folgt aus den frühern Begriffen höchst einfach, daß die Linien des untern Theils auf die des obern Theils fallen werden. Schnitten sich die Linien nun auf einer Seite, so schnitten sie sich auch auf der andern, folglich in zwey Punkten, was gegen einen Grundsatz ist.

II. Dieser zweyte Satz folgt unmittelbar aus dem Satz des zureichenden Grundes. — Ein Winkel hängt von der gegenseitigen Lage seiner Schenkel ab. Die Gleichheit oder Ungleichheit zweyer Winkel also von der Lage eines jeden zweyten Schenkels gegen den ersten. Ist nun dieser erste Schenkel gemeinschaftlich, so ist kein Grund da, warum die Gleichheit oder Un- gleich-

*) Ich gebrauche hier die Worte „oben" und „unten" der Kürze wegen, statt zu sagen: „auf der „einen Seite der schneidenden Linie," und „auf der „andern Seite der schneidenden Linie."

gleichheit der Winkel von etwas anderm abhängen sollte, als von der Lage der zweyten Schenkel. Die Gleichheit oder Ungleichheit der äußern und der innern Winkel hängt also nur von der Lage der beyden geschnittenen Linien ab, weil die schneidende Linie der gemeinschaftliche Schenkel ist. Da nun diese Lage der geschnittenen Linien oben und unten dieselbe ist, indem sie sich oben nicht schneiden, und auch unten nicht schneiden, so ist kein Grund vorhanden, warum die äußern Winkel zu den innern oben ein anderes Verhältniß haben sollten, als die äußern Winkel zu den innern unten haben. Wären also oben die äußern Winkel größer wie die innern, so wären auch unten die äußern Winkel größer wie die innern. Wären aber oben die äußern Winkel kleiner wie die innern, so wären auch unten die äußern Winkel kleiner wie die innern. In beyden Fällen wäre aber die Summe der anliegenden äußern Winkel oben und unten entweder größer oder kleiner als die Summe der anliegenden innern Winkel oben und unten, d. h. ein flacher Winkel größer oder kleiner als der andere flache, welches nicht möglich ist. Daraus folgt, daß die äußern Winkel den innern oben und unten gleich seyn müssen. W. Z. E. W *).

III. Daß sich die Linien schneiden, folgt rein indirekt aus dem zweyten Satz. Wo aber? folgt durch Aufeinanderlegen des untern Theils der Figur auf den obern, indem dann wegen der größern untern Winkel, das obere Paar Linien

---

*) Ich werde mir nie Mühe geben, diesen Beweis zu vertheidigen. Hier ist er. Ich halte ihn für völlig streng. Wem aber die Einfachheit und die Evidenz desselben nicht genügt, der mag sich mit einem minder einfachen und weniger evidenten begnügen.

zwischen das untere zu liegen kommt, so daß, wenn sich die untern schnitten, sich nothwendig auch die obern schneiden müßten. Da aber zwey gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können, so können diese sich hier nur oben schneiden.

Endlich:

IV. folgt der vierte Satz rein indirekt aus den vorhergehenden.

§. 45. Wer wird nicht einsehen, daß auf diese Weise die ganze Lehre der Linien und der Winkel zwar nicht Euklidisch, aber dafür völlig streng wissenschaftlich und dabey so einfach behandelt ist, daß man sich wenigstens darüber freuen muß, wenn man auch, erwägend daß das wahre immer zugleich das einfachste seyn muß, sich nicht darüber verwundern kann. Genug schon hätten wir also unsre beyden ersten Behauptungen (§. 20.) außer Zweifel gesetzt; allein, bekannt mit der Hartnäckigkeit unsrer Gegner, von denen manche weit lieber an ihrer eigenen Vernunft als an der Untrüglichkeit der Euklidischen Methode zu zweifeln scheinen, fügen wir auch noch eine Uebersicht des nun folgenden bey.

§. 46. Von den letzten Sätzen der Winkel findet sogleich der Uebergang zu den Dreiecken und überhaupt zu den völlig begrenzten Flächen (Figuren) statt. Was von den Winkeln in diesen gilt, ohne Rücksicht auf die Seiten, ist in dem vorhergehenden schon enthalten und darf hier nur herausgehoben werden.

Nach der Erklärung der congruenten Figuren können sogleich die 5 Sätze der Congruenz der Dreiecke wie dies gewöhnlich geschieht, auf-

gestellt werden *). Desgleichen erleiden alle Folgerungen die man gewöhnlich daraus zieht, keine bedeutenden Abänderungen; aber das Ganze ist weit besser und systematischer zu ordnen, da die Lehre der Winkel schon in dem ihr bestimmten Abschnitt ganz vollendet ist, und hier nicht mehr auf eine unnatürliche Weise eingreifen und stören kann. Es ist dies ein Vortheil der insbesondere für den Unterricht von unberechenbarer Wichtigkeit ist, da die ganze Wissenschaft durch diese einfache Anordnung von dem Anfänger gleich in der erstern Zeit übersehen und dadurch bedeutend schneller und richtiger aufgefaßt und begriffen wird.

§. 47. Dann aber muß wieder wie bey den Linien und Winkeln erklärt werden, was man unter Summe und Differenz zweyer Figuren, was unter Gleichheit und Ungleichheit zweyer Figuren zu verstehen habe.

1) Eine Summe zweyer Figuren nennen wir diejenige Figur, welche entsteht, wenn man die beyden Figuren mit irgend einer Seite neben einander hinlegt. (Das Addiren der Figuren.)

2) Differenz zweyer Figuren nennen wir die Figur, die entsteht, wenn man die beyden Figuren mit einer ihrer Seiten auf einander, sie selbst aber in einander legt. (Das Subtrahiren der Figuren.)

---

*) Nur muß man bemerken, daß der 5te Satz so heißen muß: „Zwey Dreiecke sind congruent, wenn „zwey Seiten und ein einer Seite gegenüberstehender „Winkel in beyden dieselben sind, während die Summe der beyden der andern Seite gegenüberstehenden „Winkel größer oder kleiner als ein flacher Winkel „ist." — Der, den man an dessen Stelle aufzustellen pflegt, ist nur ein besonderer Fall hiervon.

Gleiche Figuren nennen wir diejenigen, die aus denselben congruenten Figuren durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt sind *).

Congruente Figuren sind daher auch gleiche, aber nicht umgekehrt.

Der Begriff der Summe und der Differenz zweyer Figuren kann nun auch erweitert werden, indem man diejenige Figur im allgemeinen darunter versteht, die den oben so genannten Figuren gleich oder kongruent sind.

Größer heißt eine Figur als die andere, und die andere dann kleiner als die erste, wenn erstere der Summe aus der zweyten und einer beliebigen dritten Figur gleich ist.

§. 48. Die Sätze (§. 33 und §. 35.) folgen nun für den Fall, daß a, b, c, d, Figuren bezeichnen, und daß sich die Zeichen + und — auf unsre Summen und Differenzen der Flächenfiguren beziehen unmittelbar, und zwar mit derselben Evidenz, mit der sie vorher für Linien und ihre Summen und Differenzen, und dann auch für Winkel und ihre Summen und Differenzen abgeleitet wurden.

§. 49. Einen der zwey, drey, vier und mehr gleichen Summanden einer Summe nennen wir die Hälfte, das Drittheil, das Viertheil ꝛc. den vielten Theil einer der Summe gleichen Figur; so wie diese dann das

---

*) Als Philosoph kann man sagen: „Gleiche Figuren sind diejenigen, die einerlei Quantität haben." Aber als Geometer kann man keine andere als obige Definition geben, da es des Geometers erste Pflicht ist, in allem was er aufstellt, die höchste Anschaulichkeit zu erreichen — Für den Geometer ist jene Definition nichts anders, als sagte man: Gleich sind die Figuren, die gleich sind. — —

Doppelte, Dreyfache, Vierfache rc. Vielfache jenes Summanden.

1) Sind die Hälften, Drittheile rc. gleich, so sind auch die ganzen Figuren gleich; und dieser Satz auch umgekehrt.

2) Sind die Hälften, Drittheile rc. einer Figur größer als die Hälften, Drittheile rc. einer andern, so ist die ganze erste Figur größer als die zweyte; und umgekehrt.

Diese, so wie alle (gewöhnlich arithmetischen) Sätze der Art, folgen nun eben so evident, und zwar als besondere Fälle unmittelbar aus den 7 Sätzen von den Summen und Differenzen der Figuren.

§. 50. Die Sätze der Gleichheit der Parallelogramme, der Dreiecke, so wie alle daraus hervorgehenden Sätze der Gleichheit der Figuren, wie sie weiter in der Geometrie abgehandelt werden, bekommen auf diese Weise die erfreulichste Strenge und Klarheit, die sie weder im Euklid, noch in irgend einem andern Lehrbuch der Geometrie haben, und auch nicht haben können, weil der Begriff der Gleichheit nicht als klarer, ächt geometrischer Begriff ausgesprochen sich findet.

Zugleich erhellet mit unwiderleglicher Evidenz, daß der Theil der Geometrie der Linien und Flächen, der es noch nicht mit den Verhältnissen und ihrer Vergleichung, so wie noch nicht mit der Vergleichung der geraden und krummen Linie zu thun hat,

1) ganz ohne arithmetische oder sonstige fremde Begriffe,

2) höchst einfach und streng wissenschaftlich abgehandelt werden kann.

Und so legen wir denn die Feder mit der Ueberzeugung aus der Hand, daß wir unsre bey-

den ersten Behauptungen (§. 20.) eben so unwiderleglich als deutlich gerechtfertigt haben; so daß wir zur gänzlichen Erreichung unsres (§. 20.) ausgesprochenen Zweckes, uns nur noch zu dem Kalkul zu wenden haben.

§. 50 a. Damit aber die Welt nicht ohne Streit bleibe, weil nur aus dem Kampfe endlich das Wahre hervorgehen kann, so setzen wir hier noch die Geometrie weiter fort, und theilen unsre Ansichten über das Wesen der Verhältnisse, so wie über die Behandlung des Raumes in so ferne seine Stetigkeit vorzüglich in Betrachtung kommt, denen mit, die darauf achten wollen *).

§. 51. Unserer Ansicht gemäß, muß die Lehre von den Verhältnissen, wenn sie ächt geometrisch, d. h. anschaulich klar und zugleich strenge seyn soll, nach folgenden Principien behandelt werden.

1) Unter Verhältniß zweyer Raumgrößen, verstehe ich die Art und Weise, wie man sich die eine oder eine ihr gleiche aus der andern oder einer ihr gleichen durch Theilung und Zusammensetzung dieser Theile entstehend denkt; d. h. die

---

*) Man verstehe mich hier recht. Ich sage: daß das bisher über die Behandlung der Geometrie behauptete absolut unwiderlegbar ist. Das über Geometrie nun folgende werde ich nicht minder hartnäckig vertheidigen, so lange man es bona fide angreift. Gegen den aber, der nicht der guten Sache wegen kämpft, sondern nur um des Streites willen, werden meine Behauptungen weder unterliegen, noch siegen, da es einem jeden frey steht, seine eignen Ansichten von einer Sache zu haben, die ihrer Natur nach von unserm Verstande nicht erreichbar ist. Zuletzt wird es bloß darauf ankommen, welche Ansicht die einfachste ist, und welche für den Menschen den größten praktischen Nutzen gehabt haben wird.

eine als ein Vielfaches eines vielten Theils der andern denkt *).

Hieraus folgt sogleich, daß nur von dem Verhältniß zweyer gleichartigen Größen die Rede seyn kann, da eine Raumgröße nie durch Zusammensetzung einer andern ungleichartigen Raumgröße entsteht.

2) Das Verhältniß zweyer Raumgrößen wird immer durch zwey ihnen correspondirende Zahlen bestimmt, welche anzeigen, wie vielmal eine gleichartige dritte Raumgröße (das Gemäß genannt) in beyden gegebenen Raumgrößen ohne Rest enthalten ist. Diese Zahlen selbst nennen wir die Maaße der Raumgrößen in Bezug auf dieses Gemäß.

Man sieht ohne nähere Erörterung ein, wie diese Zahlen dienen, um eine Raumgröße oder eine ihr gleiche aus der andern zu erzeugen. Man theilt die eine in so viele Theile als ihr Maaß anzeigt, und hat dann das Gemäß; dieses Gemäß nimmt man so vielmal als das Maas der andern anzeigt, so hat man eine der andern gleiche Raumgröße **).

---

*) Auf die Frage: was ist Verhältniß zweyer Raumgrößen, gebe ich zwey Antworten, die eine als Philosoph die andere als Geometer. Als Philosoph sage ich ganz kurz: „Verhältniß ist die Verschiedenheit der Quantität;" aber als Geometer kann ich keine andere Definition als die obige geben, weil sich die Mathematik bloß dadurch von der Philosophie (oder wie die Franzosen sagen, von der Methaphysik) der Mathematik unterscheidet, daß erstere sich nur auf das einläßt, was anschaulich, noch im Bereiche unsrer Sinnlichkeit ist, unserm Verstande durch Zergliederung ganz klar gemacht werden kann.

**) Warum unterscheidet man gewöhnlich bey dem Vortrag der Geometrie nicht Maaß und Gemäß von einander, da sie doch so wesentlich verschieden

§. 52. Die Frage ist nun:

„Ist das Verhältniß von je zwey beliebigen gleichartigen Raumgrößen unbedingt und allemal bestimmbar oder nicht?

Die Antwort fällt verneinend aus. Denn es läßt sich leicht zeigen, daß wenn das Verhältniß von je zwey gleichartigen Raumgrößen immer bestimmbar wäre, so würde der Raum irgendwo eine Grenze der Theilbarkeit haben, was gegen die Art ist, wie uns der Raum erscheint, also gegen einen unsrer Grundsätze.

Es kann daher auf gar mancherlei Weise zwey gleichartige Raumgrößen geben, deren Verhältniß (in Zahlen) absolut unbestimmbar ist.

§. 53. Aber es ist uns Geometern darum zu thun, eine jede Raumgröße aus einer jeden andern Raumgröße durch Theilung und Zusammensetzung der Theile erzeugen zu können. In so ferne nun dies bey manchen Paaren von Raumgrößen absolut und unbedingt unmöglich ist, begnügen wir uns damit, wenn auch nicht diese Größe, doch eine dritte aus der ersten zu erzeugen, welche entweder kleiner oder größer als die wirklich gesuchte ist, von ihr aber so wenig wie möglich unterschieden. Und die absolute Unmöglichkeit die gesuchte zweyte Raumgröße auf gedachte Art aus der ersten selbst hervorzubringen vor uns sehend, sind wir natürlich schon sehr und vollkommen zufrieden, wenn wir nur eine dritte erzeugen können, die von der eigentlich ge=

---

sind? Wie kann die Lehre vom Messen der Raumgrößen nur einigermaßen verständlich werden, wenn man nicht einmal diese Begriffe von einander durch bestimmte Worte absondert. Auch beweisen unsre Lehrbücher der Geometrie hinlänglich, daß die Lehre vom Messen noch in ihrer völligen Kindheit ist. —

suchten zweyten so wenig verschieden ist, als man nur immer will, d. h. so, daß bey jeder dritten Größe, die man schon gefunden hat, und die von der gesuchten zweyten um ein noch so kleines Theilchen verschieden ist, man doch noch immer eine neue solche dritte Größe angeben kann, die sich von der gesuchten zweyten um noch weniger unterscheidet.

§. 54. Die Möglichkeit aber hievon geht aus nachstehenden Betrachtungen hervor.

In je mehr Theile die erste Raumgröße getheilt wird, desto kleiner werden die Theile. Trägt man nun einen solchen Theil auf der zweyten Raumgröße ab, (oder auf einer ihr gleichen) so lange als solches angeht, so ist der Rest der zuletzt bleibt, immer kleiner noch als dieses Theilchen (das Gemäß). Da man nun die erste Raumgröße in so viele Theile getheilt und dadurch das Gemäß so klein sich denken kann, als man nur immer will, so kann man sich auch den Rest, der immer noch kleiner seyn muß, als das Gemäß, so klein denken als man nur immer will, so daß also, diesen Rest weglassend, eine dritte Größe entsteht, welche der zweyten so nahe kommen kann als man nur immer will.

Trägt man das Gemäß auf der zweyten Raumgröße noch einmal mehr ab, so entsteht eine 4te Raumgröße, die größer als die zweyte ist, aber auch nur um ein Theilchen von ihr verschieden, das jedesmal kleiner als das Gemäß, mit dem Gemäß selbst, es mag noch so klein schon seyn, doch noch immer kleiner gedacht werden kann.

§. 55. Zwey gleichartige Raumgrößen, deren Verhältniß absolut unbestimmbar ist, nennt man incommensurable Größen. Ohnerachtet also das Verhältniß zweyer incommensurabler

Größen absolut unbestimmbar ist (in Zahlen), so läßt sich doch immer eine dritte und vierte Raumgröße denken, die eine kleiner die andere größer als die zweyte der incommensurablen Größen, die dieser zweyten so nahe seyn können, als man nur immer will, und deren Verhältniß zur ersten der incommensurablen Größen bestimmbar ist, und zwar wird dieses letztere bestimmbare Verhältniß durch desto größere Zahlen ausgedrückt seyn, je weniger die gedachte dritte und vierte Größe sich von der zweyten unterscheiden. Das Verhältniß der ersten Größe zu einer dieser dritten und 4ten Größen nennt man das Näherungsverhältniß der beyden incommensurablen Größen, und man sagt dabey das Verhältniß nähere sich dem wahren (dem in der Idee in uns lebenden aber in Zahlen absolut unbestimmbaren) desto mehr, in je größern Zahlen es angegeben ist, (weil dann die Größe, die mittelst dieser Zahlen aus der ersten erzeugt wird, von der (eigentlich gesuchten) zweyten der incommensurablen Größen desto weniger verschieden ist, je größer diese Zahlen selbst sind).

Zwey incommensurable Größen haben also ein absolut unbestimmbares Verhältniß zu einander, dagegen allemal ein Näherungsverhältniß, welches man so weit annähernd bringen kann, als man nur immer will *).

---

*) Also genau genommen drückt dies aus: Von zwey incommensurablen Größen läßt die eine durch ein Vielfaches eines beliebig vielten Theiles der andern sich absolut nicht ausdrücken, aber diese Vielfache können doch dieser zweiten Größe so nahe kommen, als man nur immer will, d. h. sie können so werden, daß sie sich von der gedachten zweyten um ein Theilchen unterscheiden, welches, es mag noch so

§. 56. In so fern wir das der bestimmten Verhältnisse nur bedienen, um die zweyte Größe selbst aus der ersten zu bestimmen, ist bey incommensurablen Größen das Näherungsverhältniß für unsre Absichten im allgemeinen eben so hinreichend, als wenn das Verhältniß wirklich bestimmbar gewesen wäre. Denn es ist entweder in der Anwendung die erzeugte Größe das Endresultat, oder es wird solche selber wieder zur Erzeugung anderer Größen aus ihr gebraucht. Im erstern Fall giebt das Näherungsverhältniß zwar nicht die gesuchte Größe, aber doch eine von ihr so wenig als man nur immer will verschiedene, welche als Endresultat so gut als jene selbst den Anforderungen der Aufgabe (in der Anwendung) entspricht. Im andern Falle aber würde freilich der Fehler, der in der einen Größe schon ist, durch eine neue Erzeugung aus ihr möglicherweise größer werden können. Allein im schlimmsten Fall, wenn er nehmlich um irgend eine bestimmte, übrigens noch so große Zahl vervielfacht werden sollte, so kann selbst dieses vielfache, es mag noch so klein schon gedacht worden seyn, doch immer noch kleiner gedacht werden. Dies erhellet, indem man bedenkt, daß der $n$te Theil dieser letztern noch so kleinen Größe, es mag n eine noch so große, aber bestimmte Zahl seyn, immer noch möglich ist, und man also nur jenen ersten Fehler, da er so klein wer-

---

klein gedacht worden seyn, doch noch immer kleiner gedacht werden kann. Es giebt daher eine unendliche Menge solcher Näherungsverhältnisse, die der Reihe nach auf einander folgend dem wahren immer näher und näher kommen, und dabey in derselben Ordnung in immer größern und größern Zahlen ausgedrückt sind.

den konnte, als man nur immer wollte, bis auf diesen ten Theil hätte reduciren dürfen, um dann den letztern Fehler, der das fache von jenem ist, so zu haben wie er jetzt ist, d. h. so klein als man nur immer will.

§. 57. In der Theorie kann also das Näherungsverhältniß, so lange es kein bestimmtes ist, so daß es in jedem Falle der Anwendung noch so nahe genommen werden kann, als man nur immer will und als es für die Anwendung nöthig ist, für das Verhältniß der beyden incommensurablen Größen selbst genommen werden. — In jedem Falle der Anwendung muß man aber dann das unbestimmte Näherungsverhältniß so bestimmen, daß jedes Endresultat, wenn es nicht dem gesuchten ganz gleich kommt, doch von ihm so wenig verschieden ist, als es dem in der Anwendung geforderten Zweck gemäß, verschieden seyn darf.

§. 58. Ein Verhältniß zweyer Raumgrößen ist dem Verhältniß zweyer andern Raumgrößen gleich, wenn beyde durch dieselben Zahlen bestimmt werden. Man kann aber auch von der Gleichheit zweyer Verhältnisse zwischen incommensurablen Größen sprechen, in so fern nehmlich ihre Näherungsverhältnisse damit gemeint sind. Da aber zwey incommensurable Größen eine unendliche Menge verschiedener Näherungsverhältnisse haben, so nennen wir nur dann die Verhältnisse zwischen incommensurablen Größen gleiche Verhältnisse, wenn jedes bestimmte Näherungsverhältniß des einen Paar Größen, auch zugleich unter der Reihe der Näherungsverhältnisse des andern Paares vorkommt.

§. 59. Gesetzt also wir wollten beweisen,

daß, wenn in einem Dreieck ABC *) eine Linie DE mit AB parallel gezogen ist, dann das Verhältniß AC zu DC dem Verhältniß BC zu EC gleich seyn müsse, so muß man unterscheiden: 1) wenn das Verhältniß AC : DC commensurabel, 2) wenn dasselbe Verhältniß incommensurabel ist **). Im erstern Fall unterscheidet man wieder a) ob DC selbst das Gemäß von AC ist, b) oder nicht, so daß beyde, nehmlich AC und DC ein gemeinschaftliches Gemäß X haben. Im Falle a) folgt der Satz unmittelbar aus der Congruenz der Dreiecke, indem man zeigt, daß wenn AC zu DC durch die beyden Zahlen m und 1 bestimmt wird, dann auch BC zu EC durch dieselben beyden Zahlen bestimmt sey. Für den Fall b) denkt man sich das gemeinschaftliche Gemäß von C aus auf CA abgetragen und durch den Endpunkt eine Parallele mit AB gezogen, welche dann von C aus auf der CB ein Stück abschneidet, das wir durch Y bezeichnen wollen. Ist nun X in AC, m mal enthalten, so steckt auch Y in BC, m mal (nach a)). Ist X in DC, n mal enthalten, so steckt auch Y in EC n mal, aus demselben Grunde. Ist also das Verhältniß von AC zu DC durch die beyden Zahlen m und n bestimmt, so ist dasselbe auch mit dem Verhältniß BC zu EC der Fall. W. Z. E. W.

Im zweyten Falle aber, wenn nehmlich das Verhältniß AC zu DC incommensurabel ist, hat man nach der gegebenen Definition der Gleich-

---

*) Die Figur kann man sich leicht selbst construiren, weswegen sie hier weggelassen ist.

**) Incommensurables Verhältniß soll so viel heißen, als Verhältniß zwischen incommensurablen Größen.

heit incommensurabler Verhältnisse bloß zu beweisen, daß wenn X der mte Theil von AC ist und m jede mögliche bestimmte Zahl bezeichnet, und wenn X in DC n mal enthalten ist, dabey aber ein Rest bleibt, der kleiner ist als X, dann auch Y in BC m mal ohne Rest und in EC n mal mit einem Rest enthalten ist, der kleiner ist als Y. Daß Y auch in BC, m mal ohne Rest enthalten seyn müsse, erhellet unmittelbar aus (a). Das zweyte geschieht wie folgt: Man mache CG = m mal X ziehe GH parallel mit AB, so ist CH = m mal Y. Es bleibt also nur noch übrig zu beweisen, daß wenn DG < X ist, auch EH < Y seyn müsse. Zu dem Ende ziehe man von H aus, eine Linie HK parallel mit AC, welche die DE in dem Punkte K trifft; so entsteht das Dreieck HKE, dessen Seiten parallel mit den Seiten des Dreiecks ABC laufen, das also mit ABC gleiche Winkel hat. Denkt man sich nun dieses Dreieck HKE auf CAB gelegt, so daß H auf C und HK auf CA fällt, so muß HE auf CB fallen, und KE fällt parallel mit AB und also auch parallel mit der durch die Endpunkte von X und Y gehenden Linie. Und hieraus folgt nun mit der größten Evidenz, daß wenn HK oder DG kleiner ist als X dann auch EH kleiner seyn müsse als Y; also eben so evident, daß wenn m und n ein bestimmtes Näherungsverhältniß von AC zu DC ist, dasselbe auch ein bestimmtes Näherungsverhältniß von BC zu EC seyn müsse. Und da X ein ganz willkührlicher Theil ist, das Verhältniß m und n also jedes Näherungsverhältniß in sich begreift, so folgt nach der (§. 58.) gegebenen Erklärung, daß die Verhältnisse AC zu DC und BC zu EC auch gleich seyn werden, wenn sie incommensurabel sind.

§. 60. Ganz auf dieselbe Art und eben so anschaulich strenge, kann man nun aber auch beweisen, daß das Verhältniß zweyer Dreiecke gleich ist dem Verhältniß ihrer Grundlinien, sobald ihre Höhen gleich sind, und zwar, es mag das Verhältniß commensurabel oder incommensurabel seyn.

§. 61. Da ferner der Satz, wenn zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind, so sind sie unter sich selbst gleich, unsern gegebenen Erklärungen zu Folge gelten muß, sowohl wenn die Verhältnisse commensurabel, als auch wenn sie incommensurabel sind, wie das ganz evident in die Augen fällt, so werden alle Sätze der Proportionen, wie sie gewöhnlich in der Geometrie vorkommen, sowohl im Falle die vorkommenden Verhältnisse commensurabel oder im Falle sie incommensurabel sind, mit der größten geometrischen Evidenz bewiesen werden können.

§. 62. Um hierüber keinen Zweifel zu lassen und insbesondere um zu zeigen, daß auch dieser Theil der Geometrie ganz rein aus sich selbst, und ganz ohne arithmetische oder sonst fremde Begriffe abgeleitet werden könne, wollen wir noch die Hauptsätze, die hier aufgestellt werden müssen, an unserm Auge vorüber gehen lassen.

§. 63. Sind A und B zwey gleichartige Raumgrößen, so wie auch C und D, so drückt das Zeichen

$$A : B = C : D$$

welches man eine Proportion nennt, aus, daß das Verhältniß A : B dem Verhältniß C : D gleich sey.

§. 64. Hieraus folgt:

I) Ist A: B = C: D und
    C: D = E: F

so ist auch A: B = E: F

II) Ist A: B = C: D

so ist auch

1) B: A = D: C

2) A + B: B = C + D: D

3) A — B: B = C — D: D wenn A > B

4) B + A: A = D + C: C

5) B — A: A = D — C: C wenn B > A

wie mit unwiderlegbarer Evidenz unmittelbar aus dem Begriff des Verhältnisses und zwar sowohl für den Fall, daß die Größen (Glieder des Verhältnisses) commensurable, als auch für den, daß sie incommensurable Größen sind, hervorgehet; und, was besonders zu bemerken ist, ohne daß die Begriffe des Addirens oder Subtrahirens der Zahlen, also ohne daß arithmetische Begriffe dabey zum Vorschein kämen.

§. 65. Die Hauptsache bleibt nun: zu beweisen daß, wenn

A: B = C: D

und dabey alle vier Größen gleichartig sind, dann auch seyn müsse

A: C = B: D

dies beweisen wir aber auf folgende Art:

I. Sey X das gemeinschaftliche Gemäß von A und von B, so wie Y das von C und D, und die Zahlen des Verhältnisses seyen m und n, so ist:

A = m. X (das m fache von X)
B = n. X, C = m. Y, D = n. Y.

II. Ferner ist m (p Z) = p. (m Z) d. h. das m fache des p fachen einer Größe Z ist gleich dem p fachen des m fachen von Z. Dnn es ist:

p.

$$
\begin{aligned}
p.Z &= Z + Z + Z + Z + \ldots \text{ (p mal)}\\
m.(p\,Z) &= [Z + Z + Z + Z + \ldots \text{ (p mal)}]\\
&+ [Z + Z + Z + Z + \ldots \text{ (p mal)}]\\
&+ [Z + Z + Z + Z + \ldots\ldots\ldots]\\
&+ [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad]\\
&+ \ldots \text{ (m mal)}
\end{aligned}
$$

Nun wird aber aus den frühern Sätzen von den Summen der Linien, der Winkel, der Figuren, leicht abgeleitet, daß eine solche Summe dieselbe bleibt, in welcher Ordnung man auch die Summanden zusammennimmt; folglich kann man die Z in jeder Vertikalreihe zusammennehmen und erhält so:

$m.(p.Z) = mZ + mZ + mZ + mZ + \ldots$ (p mal)

folglich

$m.(p\,Z) = p.(mZ)$. W. Z. E. W.

III. Nun ist auch

$$mX : mY = X : Y$$

denn es sey das gemeinschaftliche Gemäß von X und Y durch Z bezeichnet und zwar

$X = pZ$, $Y = qZ$ so ist

$mX = m(pZ) = p(mZ)$ und

$mY = m(qZ) = q.(mZ)$

folglich geben mX und mY durch das gemeinschaftliche Gemäß mZ gemessen, dieselbe Zahlen p und q, welche man für X und Y, durch Z gemessen, erhielt. W. Z. E. W.

IV. Daher ist auch:

$$nX : nY = X : Y$$

mithin auch

$$mX : mY = nX : nY$$

oder

$$A : C = B : D. \quad \text{W. Z. E. W.}$$

§. 66. Man bemerke, daß zu diesem Beweise, der eben so gut für commensurable als für incommensurable Verhältnisse gilt, wieder auf keine Weise Kenntniß der Arithmetik erfordert wird, indem er ganz rein aus den früher aufgestellten Begriffen ächt geometrisch entwickelt wurde.

Außer den bisherigen Sätzen der Proportionen giebt es aber in der Geometrie keine mehr, die von den Raumgrößen im allgemeinen statt finden können; daher man denn zur Behandlung der besondern Verhältnisse zwischen Linien, zwischen Flächen und zwischen Körpern übergehen muß.

§. 67. Wir begnügen uns hier, mehrere dieser Sätze bloß historisch aufzustellen, da, wer sich das vollständige System der Geometrie nach unsern Principien näher betrachten will, die Beweise und überhaupt das Wesen des Ganzen genugsam aus der oben angeführten: Geometrie und Trigonometrie 1819 hervorgehen, besonders für denjenigen, der das vorstehende gehörig aufgefaßt hat *).

---

*) Wenn man dort der incommensurablen Verhältnisse nicht weiter erwähnt findet, so geschieht es deswegen, weil dem Zwecke jener Schrift zu Folge, der Verfasser nicht blos als Mathematiker, sondern auch als Pädagog erscheinen mußte. Für den ersten Unterricht ist es hinlänglich zu sagen, wie dort geschehen, daß zwey Größen immer ein gemeinschaftliches Gemäß haben müssen, weil man nur eine so kleine Größe dazu nehmen dürfe, daß es keine kleinere mehr giebt, in so ferne es dann auch keinen Rest mehr geben kann. Es wäre höchst unzweckmäßig, wenn man dort, bei dem Unterrichte, sich auf andere Art beneh-

Diese Sätze sind aber folgende:

1) Wenn vier Linien eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den beyden äußern Gliedern gleich dem Rechteck aus den beyden mittlern. Auch umgekehrt.

2) Wenn zwey Figuren und zwey Linien eine Proportion bilden, so ist das Prisma aus den beyden äußern, gleich dem Prisma aus den beyden mittlern Gliedern.

3) Wenn 4 Linien eine Proportion bilden, so bilden die Quadrate und die Würfel, welche diese Linien zu Seiten haben, ebenfalls eine Proportion. Auch umgekehrt.

4) Wenn von 8 Linien je vier in Proportion stehen, so stehen die Rechtecke aus je zwey gleichnamigen Gliedern auch in Proportion. Auch umgekehrt.

5) Wenn von 12 Linien je 4 in Proportion stehen, so stehen die rechtwinklichen Parallelepipeda aus je 3 gleichnamigen Gliedern ebenfalls in Proportion.

6) Zwey Rechtecke die ein Paar gleicher Seiten haben, verhalten sich wie das andere Paar Seiten.

7) Zwey rechtwinkliche Parallelepipeda, die gleiche Grundflächen haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

8) Zwey Dreiecke die einen gleichen Winkel haben, verhalten sich, wie die Rechtecke aus den beyden Seiten, die diesen Winkel einschließen,

---

men wollte. Den schon Eingeweihten kann man später immer noch nachholen was in dieser Hinsicht nachzuholen ist. Ueberhaupt kommt es dann zuletzt den Universitätsvorlesungen zu, eine allgemeinere und höhere Ansicht der Wissenschaft zu geben, die jeder Lehrer dem Compendio beyfügen muß.

Diese, die hier nur willkührlich herausgehoben sind, und eine große Menge ähnlicher Sätze, lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen der Proportionen ächt geometrisch, d. h. ganz rein, von arithmetischen Begriffen unabhängig und streng evident, bloß den früher aufgestellten Begriffen folgend, ohne weiters ableiten; so daß dadurch außer Zweifel gesetzt ist, daß die ganze Geometrie sich ganz unabhängig von der Arithmetik, ganz unabhängig von der allgemeinen Größenlehre nicht bloß entwickeln läßt, sondern daß sie auch, sobald sie den Anforderungen an eine reine und strenge Wissenschaft Genüge leisten soll, auf gar keine andere Weise behandelt werden darf.

§. 68. Das Verhältniß der geraden Linie zur krummen ist allemal, gerade wieder wegen der Stetigkeit oder der unendlichen Theilbarkeit des Raumes, absolut unbestimmbar, indem die gerade Linie schon nach unserer ersten zum Grundsatz erhobenen Annahme von der krummen specifisch verschieden und also keine aus der andern erklärt, keine als ein Vielfaches eines vielten Theils der andern betrachtet werden kann. Die Annahme dieses specifischen Unterschiedes ist aber bey der Annahme der Stetigkeit des Raumes durch folgenden Schluß noch insbesondere gerechtfertigt.

1) Was nicht in einer Richtung ausgedehnt ist, muß, wenn es überhaupt in Richtungen ausgedehnt ist, in verschiedenen Richtungen ausgedehnt seyn.

2) Die krumme Linie ist nicht in einer Richtung ausgedehnt, (denn sonst wäre sie von der geraden nicht verschieden), folglich muß sie nach verschiedenen Richtungen ausgedehnt seyn, wenn sie überhaupt in Richtungen ausgedehnt ist.

3) Ist sie in verschiedenen Richtungen ausgedehnt, so hat sie zuerst eine Richtung, von der sie dann zu einer zweyten Richtung, von da wieder zu einer dritten Richtung übergeht.

4) Sobald aber eine Linie eine Richtung hat, ist sie so weit eine gerade, während sie in der zweyten Richtung fortgeht wieder eine gerade, u. s. w. f.; folglich wäre die krumme Linie, wenn sie überhaupt in Richtungen ausgedehnt ist, eine aus lauter geraden Theilen zusammengesetzte gebrochene Linie, mit auf einander folgenden Ecken.

5) Da indeß die Art wie wir uns die Kreislinie denken müssen, absolut keine solche Ecken anzunehmen verstattet, so folgt, daß die krumme überhaupt nicht in Richtungen fortgeht, daß also Richtung nur das Wesen der geraden Linie bedingt, und die krumme demnach von der geraden absolut verschieden ist.

§. 69. Ohnerachtet also das Verhältniß einer jeden geraden Linie zur krummen absolut unbestimmbar ist, so giebt es doch wieder ein Näherungsverhältniß, d. h. es lassen sich immer zwey Zahlen angeben, welche zwar nicht die krumme Linie aus der geraden zu erzeugen im Stande sind, aber doch eine Linie, welche der krummen so nahe kommen kann, als man nur immer will, so daß wenn die dritte Linie der krummen noch so nahe schon ist, denn doch noch immer zwey andere größere Zahlen angegeben werden können, durch welche eine neue dritte Linie aus der ersten erzeugt wird, die der krummen Linie noch näher kommt.

Wegen der anerkannten absoluten Unbestimmbarkeit des Verhältnisses der geraden Linie zur krummen, begnügen wir (Geometer) uns, wenn wir durch Verhältnißzahlen eine krum-

me Linie oder eine ihr gleiche aus der geraden ableiten wollen (in der Anwendung) mit dem Näherungs-Verhältniß und sind desto zufriedener, als wir durch Annahme einer immer größern und größern Theilungs-Zahl, der krummen Linie immer näher und näher kommen können.

Was daher überhaupt von den Näherungsverhältnissen früher gesagt worden ist, muß auch hier von diesen Näherungsverhältnissen gelten, so daß auch diese Lehre keine besondern Schwierigkeiten mit sich führt, sondern eben so anschaulich strenge, wie die frühern, vorgetragen werden kann.

§. 70. So evident aber und strenge auch alle bisher berührten Lehren sind und auf die erwähnte Weise werden, so ist doch nicht zu läugnen, daß die Fälle, wo man durch Näherungsverhältnisse zu bestimmten Verhältnissen gelangt, überhaupt die Fälle, wo die Stetigkeit des Raums unmittelbar in Betrachtung kommt, z. B. bey der Vergleichung der Pyramiden die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, diese große und unbestreitbare Evidenz nicht, überhaupt nicht mehr Evidenz mit sich führen als auf dem gewöhnlichen, zum Theil schon von Euklid betretenem Wege.

§. 70 a. Dies erwägend, stellen wir noch, um über nichts unbefriedigt zu lassen, folgende Betrachtungen über die Stetigkeit des Raumes, als die Ursache obiger Erscheinungen, an und wir werden sehen, welch praktisch einfache und richtige Ansicht daraus hervorgehen wird.

Um ächt geometrisch zu Werke zu gehen, müssen wir von dem Raum, als dem gegebenen Elemente ausgehen und müssen uns fragen, wie uns seine Stetigkeit erscheint? Wir finden:

Theilt man eine Linie in zwey gleiche Theile,

wiederholt dieses Geschäft für jeden Theil, und so fort für jeden neuen Theil und treibt man auf diese Art das Halbiren der jedesmaligen Theile fort, so weit man nur immer will, so wird man immer kleinere und kleinere Theile erhalten, und es läßt sich kein noch so kleiner Theil der Linie denken, der nicht auf's neue noch halbirt werden könnte. In diesem Begriff der unendlichen Theilbarkeit liegt eben der der Stetigkeit des Raumes. Die Stetigkeit des Raumes erscheint uns als vorhanden bey dem Verschwinden der Theile, und sie erscheint uns desto näher, je kleinere Theile wir uns denken.

Die Stetigkeit des Raumes liegt also nur in der Idee vor uns, nicht mehr als etwas, was durch Zergliederung von dem Verstande begriffen werden kann. Sie erscheint uns ferner als erreichbar durch Zergliederung, wenn wir die Theilung fortsetzen, so daß wir immer kleinere und kleinere Theile erhalten, sie erscheint uns als erreicht, wenn wir diese Theilchen uns zuletzt verschwindend denken. — So erscheint uns der Raum in Bezug auf seine Stetigkeit.

§. 71. Aus der Art wie uns die Stetigkeit des Raumes erscheint und bloß auf die Erscheinung dürfen wir in der Geometrie gründen, folgt, daß wir zu demselben Begriff der Stetigkeit des Raumes auf zwey Wegen gelangen können:

1) entweder indem wir den Raum unmittelbar als unendlich theilbar annehmen;
2) indem wir ihn als nur bis auf eine gewisse Grenze theilbar annehmen, dabey aber uns vorstellen, daß, man mag zu dieser Grenze einen noch so kleinen Theil gedacht haben, sich doch immer ein noch kleinerer für solche denken läßt.

Die Stetigkeit ist erreicht, sobald diese Gränze gänzlich verschwindet.

§. 72. Hieraus ziehen wir mit Sicherheit die wichige Folge: Da die Stetigkeit als von uns absolut unerreichbar, nur in der Idee vor uns liegt, und dieser zweyte Weg sich ihr zu nähern nur das Mittel ist, durch welches wir unserm Verstande zu Hülfe kommen müssen, um ihn dadurch in den Stand zu setzen, sich dem absolut unerreichbaren wenigstens so weit nähern zu können, als uns unsre Schranken, Zeit und Raum, verstatten, da uns endlich die Stetigkeit als erreicht erscheint, so bald wir uns die Theile, die Grenze der Theilbarkeit, als verschwindend denken; so muß alles dasjenige, was wir auf diesem zweyten Wege den Raum zu betrachten, unter der Voraussetzung erschließen, daß die Grenze der Theilbarkeit nie klein genug gedacht werden könne, nothwendig auch für den Fall der Stetigkeit, d. h. des gänzlichen Verschwindens der Grenze der Theilbarkeit strenge Gültigkeit haben.

§. 73. Man erhält also noch dieselbe Linie, dieselbe Fläche, denselben Körper, die wir in unsern Grundsätzen als gegeben angenommen haben, wenn man die Linie als eine Summe solcher Urraumtheile, die Fläche als eine Summe solcher Linien, den Körper als eine Summe solcher Flächen sich denkt, dabey aber annimmt, daß dieser Urraumtheil kleiner noch ist, als jedes noch so klein gedachte Theilchen. Alle Folgerungen die man aus dieser Annahme zieht, müssen dabey, nach dem vorigen Paragraphen, strenge Gültigkeit haben, so lange man nur mit der gehörigen Vorsicht zu Werke geht und den

Schluß nicht da anwendet, wo seine Voraussetzungen nicht statt finden. *)

§. 74. Dieser Annahme zu Folge haben je zwey gleichartige Raumgrößen immer ein gemeinschaftliches Gemäß; entweder eine gleichartige Raumgröße von bestimmter Größe, oder doch ein Urraumtheilchen. Im erstern Falle nennen wir die Größen commensurable, im letzten incommensurable. Bey der Behandlung der Verhältnisse nach dieser Ansicht, fällt dann natürlich der Unterschied zwischen beyden ganz weg.

Man könnte denken, daß auf diese Weise auch zwey ungleichartige Größen auseinander, die eine als Vielfaches des vielten Theils der andern erzeugt werden könnten, daß also auch zwey ungleichartige Raumgrößen ein bestimmbares Verhältniß zu einander hätten. Allein man muß diesen Gedanken sogleich als verwerflich erkennen, sobald man sich erinnert, daß die Annahme eines Urraumtheils nur geschieht, um sich der Stetigkeit zu nähern, daß daher alle Folgerungen falsch sind, so lange sie der anerkannten Stetigkeit des Raumes widersprechen.

§. 75. Derselben Annahme zu Folge giebt es keine krumme Linie, sondern jede krumme Linie ist als eine aus geraden zusammengesetzte gebrochene Linie anzusehen. Das gemeinschaftliche Gemäß der geraden und der krummen Linie ist der Urraumtheil. Desgleichen ist die krumme Fläche als eine aus ebenen zusammengesetzte,

---

*) Wir bitten hier nicht misverstanden zu werden. Wir erkennen die unendliche Theilbarkeit des Raumes, seine Stetigkeit; wir nehmen die begrenzte Theilbarkeit als ein Mittel an, wodurch wir unserm Verstande zu Hülfe kommen, und durch welches wir zuletzt wieder zur Stetigkeit gelangen müssen.

gebrochene Fläche zu betrachten. Ebene und krumme Flächen haben daher auch immer ein gemeinschaftliches Gemäß.

Man übersehe nicht, daß alles hier gesagte an sich ganz unrichtig und der früher anerkannten Wahrheit entgegen ist. Es giebt absolut krumme Linien; es giebt auch absolut krumme Flächen. — Das Gesagte bezieht sich daher nur immer auf unsre obige Annahme einer begrenzten Theilbarkeit, und diese Annahme muß uns, so falsch sie an sich ist, doch nach (§. 72.) zu streng gültigen Resultaten führen, so lange wir nur darauf sehen, daß das Behauptete nicht bloß für eine bestimmte Grenze der Theilbarkeit, sondern für jede beliebige, noch so klein gedachte Grenze geltend gemacht wird.

§. 76. Ueberlegt man das bisher gesagte gehörig, so wird man finden, daß wir (Geometer) die Pflicht auf uns haben, so lange mit völliger Beibehaltung der geometrischen Evidenz, die sich auf unsre oben erwähnten Grundsätze stützt, rein und ächt geometrisch zu Werke zu gehen, als dies nur immer möglich ist, und daß diese letzte Fiktion einer begrenzten Theilbarkeit nur mit der größten Behutsamkeit und mit beständiger Rücksicht auf die Stetigkeit des Raumes angewandt werden dürfe. Uebrigens ist diese Fiktion einer begrenzten Theilbarkeit ein sehr praktisch zweckmäßiges Mittel in der Hand desjenigen, dem es um ein schnelles und leichtes Weiterdringen in den geometrischen Wahrheiten zu thun ist, und der es mit der gehörigen Vorsicht und mit beständigem Hinsehen auf die Stetigkeit des Raumes zu gebrauchen versteht. *)

---

*) Besonders wichtig scheint uns diese Ansicht auch in Bezug auf die Anwendung der Differential-

§. 77. Daß die körperliche Geometrie ganz nach denselben Principien behandelt werden könne und auch müsse, wie wir bisher die Lehre der Linien und der Flächen behandelt haben, versteht sich wohl von selbst. In der schon mehrmal erwähnten: Geometrie und Trigonometrie für die Schulen und Universitäten Deutschlands. Berlin 1819, findet man das, so viel die Umstände zuließen, möglichst vollständige System derselben. Wer diese Bogen gelesen hat und nicht gänzlich von Vorurtheilen befangen ist, wird bey dem Ueberblicken jenes Systems gestehen müssen, daß wir bis jetzt keine solche vollständige und ächt geometrische Darstellung der Elementar-Körperlehre besessen haben.

---

rechnung auf Geometrie (und somit auch auf die Mechanik) zu seyn. Es läßt sich nehmlich daraus ableiten, daß die Methode des Unendlichkleinen nach der obigen Ansicht ausgesprochen, also mit besonderer Rücksicht auf die Stetigkeit der Größen mathematische Evidenz haben könne. Ich sage, könne, weil ich mich in der Mathematik nicht gern einer Behauptung bediene, die ich nicht sogleich mit ächt mathematischer Strenge unwiderlegbar beweisen kann. Carnot (in seinen Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal) beruft sich hinsichtlich der Richtigkeit der Folgerungen, die auf die Euler'sche Ansicht der Differentialrechnung gegründet sind, ebenfalls auf die Stetigkeit. Allein es liegt dieser Begriff so dunkel in ihm, und er ist daher auch so dunkel ausgesprochen, daß eigentlich dort nichts erklärt ist. Dagegen kann diese Euler'sche Ansicht durch das obige sehr klar in's Licht gesetzt, und wenn auch nicht gerechtfertigt, doch sehr klar und einleuchtend nachgewiesen werden, warum sie zu richtigen Resultaten führen konnte. Ein Vortheil, der in der Mathematik, wo es besonders auf Klarheit der Begriffe und der Behauptungen abgesehn seyn sollte, nicht zu übersehen seyn dürfte.

Wir beschließen hier unsre Bemerkungen über die Geometrie und gehen über zu den

Bemerkungen über den Kalkul.

§. 78. Der einfachste und überzeugendste Weg, auch in Bezug auf den Kalkul unsre (§. 20.) aufgestellte Behauptung zu rechtfertigen, wäre wohl wieder der, daß wir unsre Principien des Kalkuls selbst angäben, indem dann das Behauptete als unmittelbares Resultat der Vergleichung hervorgehen würde. Allein wegen der großen, ja gänzlichen Umformung, die da erfordert wird, um das Chaos des Kalkuls in eine strenge und zugleich evidente Wissenschaft zu bringen, ist uns, diesen Weg zu betreten hier nicht vergönnt, und wir müssen uns daher einstweilen darauf nur beschränken, das Unrichtige der gegenwärtigen Behandlung durch unmittelbaren Angriff derselben in das Licht zu setzen. *)

§. 79. Dieses fällt um so weniger schwer, als der Kalkul durchgehends vom Anfang bis zu Ende gleichmäßig, unwissenschaftlich und handwerksmäßig behandelt wird, indem der Fehler zunächst in den Principien liegt, und sonach sich in dem ganzen Gebäude gleichmäßig offen und deutlich ausspricht. Das schwierige unsers Ge-

*) Zu Michaelis dieses Jahrs wird meine Theorie zum Theil selbst erscheinen, unter dem Titel: Arithmetik und Algebra für die Schulen und Universitäten Deutschlands. Ein Beitrag zur Revision der Mathematik. Allein man vergesse nicht, daß ich dem Zwecke dieser letztern Schrift gemäß für die Wissenschaft nichts vollständiges leisten kann. Ueber die Erscheinung meines großen Werkes selber, das rein wissenschaftlich die ganze Mathematik sammt ihrer Anwendung umfassen soll, sehe man die hier vorstehende Zueignungsschrift.

schäftes besteht nur in dem Umstande, daß wir hier keinen so bestimmten Gegenstand des Inbegriffes haben, wie dies in Bezug auf die Geometrie der Fall war, indem in der Geometrie des Euklides beynahe alle übrigen Lehrbücher der Geometrie begriffen sind, während die Art, die Arithmetik, Algebra ꝛc., überhaupt den Kalkul einzutheilen, anzuordnen, zu behandeln, beynahe so verschieden ist, als verschiedene Lehrbücher darüber existiren.

§. 80. Die Arithmetik der Griechen war höchst unvollkommen und kann als Wissenschaft noch gar nicht in Betrachtung gezogen werden, während ihre Geometrie beynahe schon der Vollendung nahe genannt werden konnte. Viele Jahrhunderte, ja tausende von Jahren nachher, verbreitete sich eine etwas größere Kenntniß der Arithmetik vom Morgenlande aus, die vorzüglich durch das Forschen nach astronomischen Wahrheiten erzeugt wurde. Aber erst im 16ten und 17ten Jahrhunderte fingen die Fortschritte in dieser Wissenschaft an, etwas bedeutender zu werden. Allen die sich damit beschäftigten, war es indeß hauptsächlich um Auffindung praktischer Methoden zu thun, um solche in andern Untersuchungen der Geometrie oder der angewandten Mathematik, bey denen sie eben auf die Nothwendigkeit solcher Methoden gestoßen waren, anwenden zu können. Man war zufrieden, diese Methoden aufgefunden zu haben, die man für richtig erkannte, so bald die Resultate derselben in mehreren besondern Fällen der Anwendung als richtig befunden worden waren; auch trug der Geist der Mathematiker jener Zeit, nach welchem sie die Wege, auf denen sie zu ihren Sätzen gelangt waren, verheimlichten, vieles bey, um eine wissenschaftliche Behandlung zu verhindern.

Ueberdieß sah man ein, wie wichtig diese Methoden für das schnellere und leichtere Erfinden mathematischer Wahrheiten waren, wie wichtig daher ihre Erweiterung und Vermehrung seyn mußte, als daß man nicht alle Kräfte bloß hierauf hätte verwenden wollen, um die edle Zeit nicht durch, für die Anwendung unnütz scheinende Spekulationen zu verderben, die man nützlicher verwenden zu können glaubte, um so mehr, da die Begründung hier bey weitem nicht so nahe lag als bey den geometrischen Sätzen. — Die Lehrbücher über den Kalkul aus jener Zeit enthalten daher nichts weiter, als eine Sammlung von solchen praktischen Methoden, ohne eigentliche Angabe ihrer Gründe, und derjenige Schriftsteller hatte am meisten geleistet, der diese Methoden in der zweckmäßigsten Ordnung auf einander folgen ließ, (so daß eine jede schnell und leicht begriffen werden konnte) und welcher die Uebereinstimmung derselben, so oft es sich thun ließ, nachzuweisen sich bestrebte.

§. 81. Euler, dieser ausgezeichnet große Mann, brachte den Kalkul zuerst auf eine gewisse Stufe der Wissenschaftlichkeit, dadurch daß er, wo es ihm nur möglich war, selbigen von geometrischen Betrachtungen abgesondert darzustellen suchte. Indem ihm dieses besonders mit der Differentialrechnung glückte, indem er zuerst die Integralrechnung in eine gewisse systematische Form brachte, und sie, die vorher noch ganz unbearbeitet lag, mit den herrlichsten, fruchtbarsten Methoden bereicherte, indem er überhaupt das Gebiet der Mathematik nach allen Seiten zu erweiterte und ordnete, war er auch bemüht, den Kalkul in seinen Principien zu begründen, und seine Algebra ist, so viel wir wissen, die erste, welche außer der Angabe der Methoden, einige

Elementarlehrsätze zu ihrer Begründung aufstellt. So höchst unbedeutend dieser Anfang einer wissenschaftlichen Begründung des Kalkuls war, so hat er doch für uns bedeutenden Werth, einmal schon indem er uns zeigt, daß Euler, bey seiner praktisch richtigen Ansicht, bey der es ihm vorzüglich um Erweiterung der Methoden zu thun war, doch schon das Bedürfniß fühlte, die Methoden mehr noch als durch bloße Proben der wechselseitigen Uebereinstimmung ihrer Resultate zu begründen; zweytens aber insbesondere dadurch, als vermöge der Autorität eines Euler in allen folgenden Lehrbüchern diese Begründung des Kalkuls wenigstens nicht mehr gänzlich fehlen durfte.

§. 82. Kästner, der seinen Ruhm nicht sowohl der Erfindung neuer Methoden und neuer Sätze überhaupt, sondern vielmehr dem Umstande verdankt, daß er die schon vorhandenen mathematischen Wahrheiten mit der größtmöglichsten Strenge zu erweisen versuchte, dessen Werke bleibende Denkmäler seines ungemeinen Scharfsinns und seines Fleißes sind, selbst dieser Kästner kam in der Begründung des Kalkuls nicht viel weiter als Euler schon war. Die Zahl seiner Elementarsätze ist zwar größer, wie bey Euler, ohne daß jedoch dadurch die Begründung vollständiger und befriedigender geworden wäre. Lagrange und die nachfolgenden französischen Mathematiker beschäftigten sich zu sehr wieder mit der Erweiterung der Methoden, ihrer Verallgemeinerung und Vermehrung, und deswegen so wenig und so selten mit der Begründung der Principien, daß sie ausser einigen metaphysischen (also schon deswegen nicht in die Mathematik gehörigen) Untersuchungen über das Wesen der Differentialrechnung, nichts gründliches der Art

aufzuweisen haben dürften. Wenn Lagrange die Differentialrechnung zuerst in ihrer wahren ächt mathematischen Gestalt herstellte, so that dieser große Mathematiker, dem wir die größten Fortschritte verdanken, hier nichts weiter, als daß er ihren Zusammenhang mit der gewöhnlichen Algebra außer Zweifel setzte. Begründet ist deswegen die Differentialrechnung keineswegs zu nennen, indem dies nicht eher der Fall seyn kann, bevor nicht der ganze Kalkul aus einem ersten Grundsatz (der in der Art der Erscheinung seines Gegenstandes ausgesprochen ist) mutatis mutandis eben so ächt mathematisch, also evident, abgeleitet ist, wie dies oben in Bezug auf die Geometrie angegeben worden.

§. 83. Das vollständigste und vorzüglichste Werk hinsichtlich der Principien des Kalkuls, welches wir zur Zeit besitzen, ist unstreitig das: Systematische Lehrbuch der Arithmetik von H. A. Rothe (seit 1804 Professor der Mathematik zu Erlangen). I Th. 1804. II Th. 1811. Es enthält eine schätzbare Sammlung ächt mathematischer, tiefer und scharfsinniger Untersuchungen und Folgerungen, und ist daher jedem in dieser Hinsicht anzuempfehlen. H. Rothe leistete bey weitem mehr wie Euler (in dieser Beziehung) und mit Recht hat ihn auch schon einer seiner Beurtheiler dem großen Euler zur Seite gesetzt. Deutschland, das bis jetzt diese Schrift nicht gehörig gewürdigt zu haben scheint, wird vielleicht nach Jahren erst anfangen stolz darauf zu seyn, sich deren Vaterland nennen zu können. *)

§. 84.

*) Bey dieser Gelegenheit kann ich nicht unterlassen anzumerken, daß Herr Rothe auch im Besitz eines von ihm erfundenen combinatorischen Integral-

§. 84. So sehr aber dieses Werk den Namen eines systematischen Lehrbuches verdienen mag, so liegt sein großer Werth doch nur in dem Scharfsinn und in dem tiefen Forschungsgeiste des Verfassers, der sich in selbigem auf jeder Seite ausspricht, keineswegs aber in der Erreichung seines Zweckes. Denn begründet ist der Kalkul dadurch so wenig, wie durch irgend ein anderes, und wir werden sehen, wie alles unwiderlegbare, was wir unten gegen den Kalkul zu sagen haben werden, dieses sowohl wie jedes andere Lehrbuch desselben trifft.

§. 85. Fast zu gleicher Zeit mit dem zwey-

Kalkuls ist, der mir für die Lehre der Reihen von unendlicher Wichtigkeit zu seyn scheint. Wer sich je mit Reihen beschäftigt hat, wird wissen, wie sehr mühsam zuweilen die Operationen werden, ja wie man so häufig Untersuchungen ganz einstellen muß, bloß wegen der Mühe und Arbeit, die sich bey jeder neuen Operation so unverhältnißmäßig vermehren. Mehrere Mathematiker (Kramp, Arbogast,) haben daher schon auf Mittel gedacht, diesem Uebel abzuhelfen, ohne daß ihnen solches jedoch gelungen wäre. Dieser Kalkul dagegen der noch überdies wegen der höchsten Einfachheit in seinen Principien besonders schätzbar ist (und der, nebenbey sey es gesagt, nichts eigentlich combinatorisches — dies Wort im Sinne der Hindenburgischen Lehre genommen — mit sich führt) leistet, was man nur wünschen kann und dürfte daher als eines der wichtigern mathematischen Hülfsmittel betrachtet werden. Schon vor 8 bis 9 Jahren hat der Erfinder die Güte gehabt ihn mir mitzutheilen und ohnerachtet ich mich seiner in meinen Privat-Untersuchungen bediene, so muß ich doch bedauern, daß es mir nicht erlaubt ist, denselben bey meinen Arbeiten für das Publikum zu gebrauchen, in so fern es dem Erfinder noch nicht gefallen hat (wenn dies nicht etwa erst seit kurzem in den Kommentarien der Münchner Akademie geschehen seyn sollte) die Principien desselben bekannt zu machen.

ten Theile des vorgedachten Werkes erschien zu Paris von Hoëné Wronski, einem Manne der sich durch die höhern Ansichten, die sich in seinen Schriften aussprechen, berühmt und berüchtigt gemacht hat, eine: Introduction à la Métaphisique des Mathématiques, welche den Kalkul aus einem höhern Gesichtspunkte betrachtet, und auf diese Weise seine Begründung versucht. Sie umfaßt den ganzen Kalkul in seinem weiten Umfange, und ist daher deswegen schon mit der vorgenannten Rothe'schen Schrift, die bloß eine gewöhnliche, aber systematisch geordnete Arithmetik ist, nicht vergleichbar, wenn sie es nicht auch schon durch die ganz und rein entgegengesetzte Behandlung gewesen wäre. Es ist gewiß diese Schrift von sehr großem Werthe und wir haben bey Durchlesung derselben inniges Vergnügen empfunden, obschon viele paradoxe Behauptungen in ihr vorkommen, unter denen für die Mathematiker diejenige besonders interessant seyn dürfte, daß die Lagrange'sche Darstellung der Differentialrechnung absolut einseitig und falsch sey und daß nur die frühere Ansicht die richtige genannt werden könne. Für den Mathematiker als solchen, dem es um strenge, gründliche und evidente Entwickelung aus anerkannten und unbestreitbaren Principien zu thun seyn muß, verschwindet aber dieser Werth gänzlich, da sie gleich bey ihrem Beginnen aus der Sphäre der Mathematik heraustritt und in höhern, dem wahren Mathematiker fremden Regionen, ihr Wesen treibt. Wer es aber liebt auch zuweilen aus seiner Sphäre herauszutreten und die Natur und die Gesetze in ihr von einem höhern Standpunkt aus zu betrachten, der wird in ihr um so eher Befriedigung finden, als Hr. Wronski mit seiner Philosophie

eine nicht gewöhnliche Kenntniß der Mathematik verbindet, die bey andern Schriftstellern der Art (Wagner, Condillac ꝛc. ꝛc.) nicht getroffen wird.

§. 86. Und so kommt es denn, daß bis heute der Kalkul noch so wenig begründet ist, als dies in den frühern Zeiten der Fall war, und daß alle unsre dermalen existirende Lehrbücher der Arithmetik und Algebra, denen diese Begründung zunächst zukommt, immer noch nichts weiter enthalten, als eine geschichtliche Angabe der einzelnen Methoden, deren man sich bey mathematischen Untersuchungen mit gutem Erfolge bedienen kann, und denen keine weitere Begründung zu Grunde liegt, als die in den besondern Fällen (mit wenigen Ausnahmen, die übersehen werden) gefundene Uebereinstimmung ihrer Resultate.

§. 87. Die Ursache dieser Erscheinung liegt wohl nicht zunächst an einem Mangel von gutem Willen der Mathematiker, sondern hauptsächlich in der Schwierigkeit, welche die Begründung selber deswegen hat, weil man sich gänzlich hinsichtlich des Gegenstandes des Kalkuls täuschte und mit Größen (Zahlgrößen) zu arbeiten vermeinte, während man es einzig und allein nur mit sogenannten absoluten ganzen Zahlen zu thun hat. — Es ist dies eine Behauptung, die einerseits so natürlich ist, daß man sich wundern muß, wie man nicht früher auf diesen Gedanken gekommen ist, die aber auf der andern Seite, den gegenwärtigen Zustand unsrer Lehrbücher des Kalkuls erwägend, so viel paradoxes hat, daß wir ihn wahrlich nicht auszusprechen wagten, wenn nicht das ganze System der Wissenschaft, so einfach wie sich die Wahrheit immer zeigt, und zugleich so ächt mathematisch strenge und unwiderlegbar vor uns läge, daß wir gegen

jeden Einwand sicher gestellt zu seyn glauben. Die Behauptung selber ergiebt sich aber unmittelbar aus der Betrachtung des Kalkuls in allen Fällen seiner Anwendung. Man findet allemal, daß er immer nur zum Zweck hat, aus gegebenen Zahlen andere Zahlen zu suchen, indem selbst da, wo er zur Vergleichung der Größen angewandt wird, immer nur aus gegebenen Verhältnissen zwischen Größen (also aus Zahlen) andere Verhältnisse der Größen (also Zahlen) gesucht werden.

§. 88. Ohne uns länger hiebey zu verweilen, wollen wir nun zur Sache selber übergehen, und die Widersprüche und Unrichtigkeiten aufdecken, so wie den gänzlichen Mangel an Wissenschaftlichkeit, deren sich die Mathematiker in Bezug auf den Kalkul schuldig gemacht haben.

Zuerst greifen wir den Grundsatz an, der gewöhnlich an der Spitze der Arithmetik zu treffen ist, nehmlich daß, wenn $a = b$ und $b = c$ ist, dann auch $a = c$ seyn müsse.

Wir glauben erstlich, daß man in der Mathematik nicht eher von der Gleichheit zweyer Größen sprechen dürfe, bevor man nicht bestimmt erklärt hat, was man unter gleichen Größen verstehe. Dies geschieht aber nirgends; denn die gewöhnliche Erklärung „gleiche Größen sind diejenigen, die einerlei Quantität haben", ist vielleicht in der Philosophie die richtigste, aber für den Mathematiker nichts weiter als: „gleich sind die Größen, die gleich sind." Ich stelle folgende ächt mathematische Definition auf: „Gleiche Größen sind diejenigen, welche durch eine gemeinschaftliche Einheit (als Gemäß) gemessen, einerlei Zahl als Maaß geben.

Für's zweyte, wenn wir auch zugeben, daß der vorerwähnte Grundsatz als solcher angenom-

men werden könne, so kann dies doch offenbar nur dann gelten, wenn a, b, c, wirklich Größen sind, und er darf daher auf keinen Fall da angewandt werden, wo diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Nun wenden ihn aber die Analysten erstlich, da an, wo sie offenbar wissen, daß die vorkommenden Zeichen nicht mehr Größen (so genannte unmögliche Größen oder auch Nullen) sind; zweytens aber fällt der Vortheil des Kalkuls ganz weg, oder vielmehr es existirt gar keiner mehr, sobald er nicht allgemeine Behandlung zuläßt; und da man bey dieser allgemeinen Behandlung, wo die vorkommenden Größen ganz unbestimmt sind, gar nicht wissen kann, ob die vorkommenden Ausdrücke wirklich Größen sind oder nicht, so darf überhaupt gedachter Grundsatz bey einer solchen allgemeinen Behandlung auf keine Weise in Anwendung gebracht werden; und wenn dies also dennoch von den Mathematikern geschieht, so muß ein solches Verfahren als höchst unwissenschaftlich und ungründlich verworfen werden, und man kann den Resultaten eben so wenig Glauben beymessen, als wenn sie unmittelbar aus der Luft gegriffen worden wären.

§. 89. Auf den Satz: „Gleiche Größen „auf gleiche Art behandelt, geben gleiche Resul„tate,“ gründet sich beinahe der ganze Mechanismus des Kalkuls. Er wird als Grundsatz aufgestellt. Wollen wir ihn als solchen auch annehmen, so tritt doch wieder derselbe Umstand ein, nehmlich man müßte da, wo er angewandt werden soll, immer genau erst untersuchen, ob man wirklich gleiche Größen habe, und da man diese Untersuchung nur in den wenigsten Fällen, nehmlich nur da, wo lauter bestimmte Größen vorkommen, anstellen könnte, so folgt daß

er nur in diesen wenigen Fällen angewandt werden darf. Wo bleibt aber die mathematische Strenge, auf die man in der Geometrie nicht ängstlich genug sehen zu können glaubt, wenn man diesen Satz ohne weiters gelten läßt, ohnerachtet die Bedingung, unter der er nur allein gelten kann, nicht erfüllt ist? —

§. 90. Daß aber die auf vorgedachte Art erschlichenen Folgerungen nicht immer richtig sind, d. h. nicht mit den übrigen Resultaten des Kalkuls übereinstimmen, beweisen folgende.

Es ist:

$$2 \log. a = \log. a^2$$
$$\log. a^2 = \log. (-a)^2$$
$$\log. (-a)^2 = 2 \log. (-a)$$

folglich $2 \log. a = 2 \log. (-a)$

oder $\log. a = \log. (-a)$.

Daraus läßt sich nun weiter ableiten, wenn e die Basis des Logarithmensystems ist:

$$e^{\log. a} = e^{\log. (-a)}$$

und, wegen $e^{\log. p} = p$, hieraus:

$$a = -a$$

woraus wieder $a + a = a - a$

$$a + a = 0$$

folglich $a + a = 0$ u. s. w. f.

§. 91. Man sieht in welch' unübersehbare Kette von unrichtigen Folgerungen man sich hier durch den Kalkul verwickelt findet. Die Folgerung $\log. a = \log. (-a)$ verursachte einen sehr lebhaften Streit zwischen Johann Bernoulli und Leibnitz. Ersterer zog daraus die Folgerung, daß die Logarithmen der negativen Zahlen reel und denen der positiven Zahlen gleich wären. Der letztere läugnete dies, weil es mit seinen Folgerungen nicht übereinstimmte. Wenn

Euler den Streit dadurch schlichtete, daß er die unendlich vielen Logarithmen zu Hülfe nahm, die, vermöge eines andern Verfahrens, sich für jede Zahl ergeben, so hat er sich zwar dadurch den Beyfall der ausgezeichnetsten Analysten erworben, allein in der That nichts gegen Bernoulli entschieden. Denn was hat er eigentlich anders gethan als gezeigt, daß nach den (bestehenden) Principien des Kalkuls auf anderm Wege sich Resultate ergeben, welche der Behauptung $\log. a = \log. (-a)$ widerstreiten. Wir geben zu, daß er die Sache unter einem allgemeinern Gesichtspunkte betrachtet hat, und daß ihm deswegen mehr Glauben beyzumessen sey. Ist aber dadurch die Sache wahr, nothwendig wahr, oder ist sie nicht doch nur wahrscheinlich; und für den Mathematiker, der außer der Wahrheit, nichts anders als Erkenntniß sich aufbringen lassen darf, ist ein größerer oder geringerer Grad von Wahrscheinlichkeit gar nicht verschieden, weil er sie selbst gar nicht kennt, daher auch ihre Grade von ihm nicht verglichen werden können.

§. 92. Konnte nicht Bernoulli ganz aus demselben Grunde fortwährend die Unrichtigkeit der Behauptung seiner Gegner als anerkannt betrachten? Konnte er nicht auch noch andere mit seiner Behauptung übereinstimmende Resultate erhalten, und erhielt er sie nicht auch wirklich aus der Quadratur der Hyperbel? Euler antwortete nicht mehr darauf. Und wenn es auch spätere Analysten thaten, so haben auch sie nichts weiter gethan, als Widersprüche im Kalkul aufgedeckt, also eigentlich bewiesen, daß der Kalkul falsch sey, d. h. zu widerstreitenden, also nothwendig unrichtigen Resultaten führe. Immer haben sie nichts weiter bewiesen, als daß der Kalkul auf keine Weise als strenge Wissen=

schaft angesehen werden könne, sondern daß er zur Zeit nichts anders sey als ein Werkzeug, dessen sich der Analyst als Handwerker bedient, um die Resultate gegebener Untersuchungen schneller auszumitteln, daß aber diesen Resultaten statt der Nothwendigkeit nicht einmal eher Wirklichkeit beyzumessen sey, bevor sie nicht auf andere Weise als wirklich und brauchbar anerkannt werden konnten.

§. 93. Die Ursache der Unrichtigkeit der (§. 90.) angegebenen, von Bernoulli gezogenen Folgerung

$$\log. a = \log. (-a)$$

liegt aber, woran bis jetzt, so viel uns bekannt ist, kein Mathematiker dachte, ganz einfach darin, daß man den Satz: „Wenn zwey Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich,“ anwandte, dieser aber hier absolut unanwendbar ist.

Hieraus erhellet aber um so deutlicher, daß, so gut dieser Satz hier zu unrichtigen Resultaten führen konnte, so gut konnte und kann er es auch irgend wo anders, wo er angewandt wird, ohne daß die Bedingung: daß man wirklich Größen vor sich habe, erfüllt ist.

§. 94. Welch' gewaltige Umformung und Abänderung und Reform und nochmalige Reform hat nicht die Lehre der entgegengesetzten Größen erlitten. Die einen nahmen positive und negative, die andern additive und subtraktive, die dritten endlich der größeren Sicherheit wegen beyde Arten zugleich an. Und ist vielleicht jetzt diese Lehre im reinen? Hat nicht noch Carnot (géometrie de position), ein so vorzüglicher Mathematiker, genugsam bewiesen, daß er von den entgegengesetzten Größen die dunkelsten Begriffe habe, ja daß er selbst die einfachsten Er-

scheinungen nicht einmal zu erklären im Stande war. Kann man den negativen Räumen, die sich nach der gewöhnlichen Ansicht der Mathematiker bey den Quadraturen ergeben, einen Sinn unterlegen, der nicht eigentlicher Unsinn ist? Die gewöhnliche Erklärung, daß die Ursache dieser Erscheinungen in dem Uebergang der Ordinate durch das Unendliche begründet sey, kommt uns eben so vor, als wenn man das Bleiben des Quecksilbers in einer Barometerröhre dadurch erklären wollte, daß Gott Urheber und Erschaffer der Welt sey. Allerdings ist dies ein Grund; aber dürfen wir in der Wissenschaft so verfahren?!? — —

§. 95. Merkwürdig ist dabey, daß die Mathematiker, die sonst, was Geometrie betrifft, so eigen sind und selbst die strengsten Beweise noch nicht wollen gelten lassen, weil etwa noch das Wort „folglich“ darin ausgelassen ist, daß dieselben, welche den Naturphilosophen alle Vernunft und den Verstand dazu absprechen, weil sie nicht beweisen, sondern nur in der Idee nachweisen, daß dieselben Mathematiker beynahe im ganzen Kalkul ihr Wesen ganz ablegen und ächt naturphilosophisch zu Werke gehen. Ein Beyspiel wird hinlänglich seyn dies zu bestätigen.

Sie sagen: „entgegengesetzte Größen sind diejenigen, die einander entgegengesetzt sind (die, zusammengefügt, einander wechselseitig aufheben). Nun führen sie Beyspiele an; + 3 bedeutet z. B. 3 Gulden Vermögen, – 3 aber dann 3 Gulden Schulden. Später wird nun der Satz aufgestellt:

$$(-3) \times (-2) = +6$$

[der, wörtlich ausgedrückt, eigentlich heißt: 3 Gulden Schulden (nicht 2 mal sondern) 2 Gulden

Schulden mal genommen giebt 6 Gulden Vermögen. *).

Dieser Satz aber wird auf folgende Art erwiesen: Soll die negative Größe — 3, 2 mal genommen werden, so erhält man — 6. Nun soll aber die — 3 nicht 2 mal, sondern (— 2) mal d. h. das entgegengesetzte von 2 mal (2 Gulden Schulden mal) genommen werden, folglich bekommt man auch das entgegengesetzte von — 6 d. h. + 6 als Resultat.

Ist dies nicht ächt naturphilosophisch? **) — Ich wenigstens ziehe die Vorlesungen über Naturphilosophie denen über eine solche Mathematik weit, weit vor. Jene, wenn sie uns auch nicht überzeugt, erregt doch eine Menge Ideen in uns, sie greift doch in unser Inneres ein und läßt uns wenigstens das gemeinschaftliche, göttliche in uns und in der Aussenwelt ahnen. Eine Mathematik aber in diesem Geiste, die so wenig

---

*) Man sieht wie der Mathematiker auf diese Weise dem Schuldner förmlich Anweisung giebt, sich mittelst neuer Schulden Vermögen zu verschaffen. Ganz recht würde man daher thun, wenn man gleich den Römern, auch noch heutigen Tages die Mathematici und Malefici in eine Klasse rechnen wollte.

**) Wer gewohnt ist die Dinge nur von ihrer prosaischen Seite zu betrachten, dem muß hier der Beweis jenes Landpredigers beyfallen, der die Gewißheit unsrer ewigen Seeligkeit in den Worten: „Gleichwie der Leue ein grimmiges Thier ist, also werden „wir in das ewige Himmelreich eingehen,“ zur höchsten Evidenz bringt.

Mehr noch gehört hieher der Schluß jenes Schülers: das „Nein“ eines meiner Lehrer muß mich deswegen das entgegengesetzte von dem zu wollen, was ich vorher wollte. Ich wollte nach Hause reisen. Der Herr Rektor sagte „Nein“; folglich will ich nur hier bleiben. Der Herr Conrektor sagte wieder „Nein“; folglich bin ich nach Hause gereißt,

überzeugt, dabey aber ihrer prosaischen Natur nach, weder Phantasie, noch Gemüth erregt, muß nothwendigerweise höchst abstoßend und widerlich werden. *)

§. 96. Welche Mühe giebt man sich nicht in der Trigonometrie, um die negativen Sinus, x. x. zu erklären; um die Richtigkeit der Formeln für alle Fälle zu erweisen? Und ist dies gelungen? Und wie einseitig ist nicht die Ansicht der Trigonometrie, wie unbegreiflich hinsichtlich ihrer Anwendung für den Anfänger? Will man sie nicht ganz allgemein behandeln, wie dies in einem Lehrbuch des Kalkuls als Wissenschaft geschehen muß, so daß man Sin x als eine Funktion von x betrachtet, bedingt durch die Gleichung

$$f(x+h) = fx. \sqrt{1-fx^2} + fh. \sqrt{1-fx^2}$$

so kann sie nur so behandelt werden, wie dies in der schon mehrmal angeführten: Geometrie und Trigonometrie x. geschehen ist, wenn man eine klare und gründliche Einsicht in das Wesen dieses Theils der Mathematik erhalten oder verschaffen will. **)

---

*) Dies die sogenannte Trockenheit der Mathematik. Wie kann sie befriedigen, wenn sie nicht überzeugt, wenn sie nicht so einfach ist, als sie bey der wahren Ansicht immer werden muß? Wie kann ein Anfänger Lust gewinnen oder nur Muth behalten, wenn ihm die Wissenschaft als ein Unendliches erscheint, dessen einzelne Theile ohne Zusammenhang, oft ohne alle Verbindung da stehen; wenn er glaubt, alle diese Theile seinem Gedächtniß einverleiben zu müssen, während ihm doch die Unmöglichkeit davon gar zu sehr in die Augen leuchtet? —

**) Während die Trigonometrie auf Schulen oft ein ganzes Semester hindurch getrieben wird und die Schüler dann doch kaum für den Augenblick im Ge-

§. 97. Sollten aber manche Mathematiker glauben, daß ihre Ansicht der entgegengesetzten Größen besser wäre, als die gewöhnlichen, und daß daher obige Behauptungen sie nicht träfen, so wollen wir zu den Brüchen gehen und zeigen, daß dort dieselben Widersprüche zu finden sind.

Ein Bruch ist ein Theil einer als Einheit angenommenen Größe, (sagen die Mathematiker).

Hieraus folgt: Der Bruch ist selbst eine Größe. Ist also z. B. das Ganze als Einheit ein Fuß, so ist $\frac{3}{4}$ ein Theil eines Fußes, also eine Linie, die man auch durch 9 Zolle ausdrücken kann. Nun heißt es: $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplizirt giebt $\frac{6}{12}$.

Früher ist aber Multipliciren als eine Operation erklärt worden, durch welche man eine Größe mehreremale nimmt. Folglich kann man eine Größe nicht mit einer andern Größe multiplizieren, sondern immer nur mit einer (absoluten) Zahl; demnach auch nicht einen Bruch mit einem Bruch, weil hier immer eine Größe mit einer Größe multiplizirt werden müßte. —

---

dächtniß behalten haben, wie die ersten 5 Elementar-Aufgaben der Dreiecke gelößt werden, beendige ich die (sogenannte analytische) Trigonometrie in 8 bis 10 Stunden, und zwar so, daß meine Schüler bestimmt Rede und Antwort darüber zu geben wissen. Die nöthige Uebung verschaffen sie sich dann von selbst bey unserm weitern Fortschreiten. Dies und alle die Fortschritte der (nicht einzelner) Schüler der Anstalt, zu der ich heute noch gehöre, die manchem in Bezug auf die Zeit unmöglich scheinen könnten, verdanke ich einzig der klaren Einsicht, die meine Mathematik durch die absolute Bestimmtheit ihrer Begriffe und insbesondere auch durch ihre Einfachheit möglich macht.

Stellt man aber eine neue Definition der Multiplikation auf, und sagt: „Multipliziren heiße, „das Produkt aus dem Multiplikanden so erzeugen, wie der Multiplikator aus der Einheit „erzeugt wird," so hat man dadurch nichts gewonnen, indem das Ungenügende und Einseitige der Ansicht nur auf die Anwendung verschoben wird. Man kann sich nehmlich höchstens, nach dieser Ansicht, die Multiplikation zweyer Brüche denken, in so fern man sich für beyde eine gleichartige Einheit denkt (und da immer noch auf eine sehr gezwungene Weise). Wie man aber $\frac{2}{3}$ Gulden mit $\frac{3}{4}$ ℔. multipliziren könne, geht daraus keinesweges hervor. Und soll man nicht Gulden mit Pfunden multipliziren, so fragt sich's, was multiplizirt man denn? — Und was wird denn ein Bruch ausdrücken, wenn man etwas untheilbares zur Einheit annimmt; z. B. was wird es bedeuten, wenn es heißt: ich bin (nicht 2 mal sondern) $\frac{2}{3}$ mal spazieren gegangen; ich habe (nicht 3 mal sondern) $\frac{3}{4}$ mal gegessen, u. s. w.? — —

§. 98. Gleich bey der gewöhnlichen Division der Zahlen sieht man sich gezwungen zwey Definitionen der Division aufzustellen, oder vielmehr zwey Fälle derselben zu unterscheiden. Dabey sagt man aber ausdrücklich und bestimmt, daß in jedem Falle entweder der Divisor oder der Quotient eine absolute Zahl seyn müsse. Nichts desto weniger dividirt man zwey Brüche durch einander, die wieder einen Bruch geben, ohne zu bedenken, daß hier nirgends die absolute Zahl zu finden ist. Eben so nimmt man, in dem Falle wo der Dividend und Divisor Größen bestimmter Art sind, wo also der Quotient eine absolute Zahl seyn soll, nichts desto weniger eine Summe aus einer ganzen

Zahl und einem Bruche als Quotient an, da doch der Bruch sich immer auf eine theilbare Einheit beziehen, d. h. selbst eine Größe bestimmter Art seyn muß. — Und dieses alles geschieht in der Mathematik, deren Evidenz und Strenge man nicht genugsam rühmen und preisen zu können glaubt!

§. 99. Eine Potenz ist ein Produkt mehrerer gleichen Faktoren. Nichts desto weniger hört man unmittelbar darauf von negativen und gebrochenen Potenzen sprechen. Wie soll man sich diese denken? Die künstlichen Hülfsmittel deren man sich bedient um z. B. durch Interpolation, oder durch neue Definitionen Licht in die Sache zu bringen, beweisen alle nur das Unvermögen der Mathematiker zu diesem Behuf. An Klarheit und Evidenz dieser Lehren ist gar nicht zu denken.

Mehr einseitig noch sieht man die Logarithmen behandelt. Das klägliche Mittel sich durch Interpolation einen Begriff von ihrem Seyn zu verschaffen, ist völlig ungenügend. Auch steht diese Lehre zur Zeit noch so abgesondert und ohne allen Zusammenhang mit den übrigen Theilen da, daß man sich nicht wundern kann, wenn sie selbst später noch, schon in der so genannten höhern Analysis, dem Anfänger Schwierigkeiten in Menge gewähren.*)

---

*) Bey dieser Gelegenheit mag folgende Entwicklung von log. $(1 + x)$ für die Basis a Platz finden. Man setze:

$$\log.(1 + x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}$$

so ist, wegen $a^{\log. p} = p$,

$$1 + x = a^{\alpha x} \times a^{\beta x^2} \times a^{\gamma x^3} \times \ldots\ldots$$

oder wegen $a^z = 1 + Az + \frac{A^2 z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$

§. 100. Man braucht aber gar nicht so weit zu gehen, um das unwissenschaftliche und gänzlich willkührliche Verfahren der Mathematiker

---

$$1 + x = \left(1 + A\alpha x + \frac{A^2\alpha^2 x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\right)$$
$$\times \left(1 + A\beta x^2 + \frac{A^2\beta^2 x^4}{1 \,.\, 2} + \ldots\right)$$
$$\times \left(1 + A\gamma x^3 + \frac{A^2\gamma^2 x^6}{1 \,.\, 2} + \ldots\right) \times \text{rc.}$$

aus welcher Gleichung sich durch Multiplikation und Vergleichung der Koefficienten, die Werthe von α, β, γ, rc. unmittelbar ergeben.

Die allgemeine Gleichung, aus der alle Koefficienten α, β, γ, rc. entwickelt werden können, findet sich:

$$\underset{a}{S}\;\frac{A^b \; p^{b+1} \times (a+1)}{(b+1)^{x}} = 0$$
$$a + b = c + 1$$

welche Gleichung so viele einzelne Gleichungen vorstellt, als man für c nach und nach alle verschiedenen Werthe 0, 1, 2, 3, 4, rc. bis ins unendliche setzen kann oder will; wo ferner für jeden bestimmten Werth von c das Zeichen S eine Summe von Gliedern anzeigt, die man erhält, wenn man statt a und b alle möglichen Werthe 0, 1, 2, 3, rc. doch so setzt, daß immer $a + b = c + 1$ ist; wo $(b + 1)^{x}$ das Produkt 1. 2. 3. ... (b + 1) bezeichnet; wo $p \times 1$, $p \times 2$, $p \times 3$, rc. die Koefficienten α, β, γ vorstellen, und wo endlich $p^{b+1} \times (a + 1)$ dem (a + 1) ten Koefficienten der (b + 1) ten Potenz der für log. (1 + x) angenommenen Reihe bezeichnet.

Ich führe diese Entwicklung von log. (1 + x) hier an, nicht weil ich sie für kürzer oder besser halte, sondern weil sie weniger bekannt ist, und zu gleicher Zeit zeigt, wie man selbst bey dieser Entwicklung in Reihen nie einer fremden Betrachtung bedarf, da diese unmittelbar aus dem eigentlichen und wahren Begriff des Logarithmen hervorgeht.

wahrzunehmen; denn es geschieht im ganzen Kalkul beynahe kein Schritt, der nicht in diesem Geiste geschähe. Ein Produkt ist eine Summe von gleichen Summanden; daraus folgert man:

$$b.1 = b, \qquad 1.b = b$$
$$b.0 = 0, \qquad 0.b = 0$$

Wie ist denn eine Summe von einem Summanden oder endlich eine Summe von **keinem** Summanden denkbar. Man sagt zwar: dies wäre der Analogie nach so. Aber was ist Analogie? Doch wohl nichts anders als ein dunkler Begriff der Aehnlichkeit. Wer bürgt uns aber, daß dergleichen dunkle Begriffe uns immer sicher führen. Man findet $2 \times 2 = 2 + 2$, der Analogie nach, könnte man nun auch sagen $1 \times 1 = 1 + 1$. Man kann sagen: eine Summe von keinem Summanden drücke eigentlich aus, daß gar nichts da sey, folglich wäre $0.b = b.0 = 0$. Allein eben so gut kann man nun auch sagen: ein Produkt von keinem Faktor wäre eigentlich ein Anzeichen, daß gar nichts da sey, folglich wäre $b^0 = 0$. Doch ist dies letztere falsch und $b^0 = 1$. — Es ist $b^0 = 1$, folglich der Analogie nach: $0^0 = 1$; es ist aber auch $0^b = 0$, folglich der Analogie nach $0^0 = 0$, welches letztere doch falsch ist. Man sieht also, wie Analogie gar nichts

---

Die letzte allgemeine Gleichung brachte ich aber deswegen hier bey, weil ich sie mit Hülfe des oben erwähnten Rothe'schen combinatorischen Integralkalkuls erhielt, und sie eine kleine Probe geben kann, welche allgemeine und doch einfache Resultate man durch ihn erhält. Mehreres findet man noch in meiner schon 1811 erschienenen Abhandlung (De elevatione serierum infinit. secundi ordinis ad potestatem exponentis indeterminati), von welcher in der Leipzig. Lit. Zeit. 1812. N. 305 und 306 eine nähere Anzeige zu finden ist.

nichts ist, und wie eine Wissenschaft schon sogleich aufhören muß, eine strenge zu seyn, sobald man sich in ihr auf Analogie einläßt.

§. 101. In welchem Verhältniß die Ziffernlehre zu dem übrigen Kalkul, nach der Meinung der Mathematiker, stehe, zeigen unsre Lehrbücher der Arithmetik und der Algebra zur Genüge. Aber eben so leicht als das vorhergehende läßt sich darthun, daß dieser Standpunkt ein ganz unrichtiger und unpassender ist, indem die auf die gewöhnliche Weise entwickelten Operationen keinesweges begründet genannt werden können.

Mehr noch gilt dies von der sogenannten Buchstabenrechnung, die (selbst die beste, die wir haben) ein wahrhaft jämmerliches Ding ist, das höchstens nur als ein Lückenbüßer und Lastträger der Analysten anzusehen seyn dürfte. *)

§. 102. Die imaginären Größen haben den Mathematikern die meiste Mühe gemacht. Man hatte keine Größen mehr, und doch erhielt man richtige Resultate, wenn man sie mit einiger Vorsicht wie Größen behandelte. An ihrer Erklärung sind indeß bis jetzt alle Versuche ge-

---

*) Es ist beinahe unbegreiflich, wie es wirklich noch zuweilen einzelne Menschen giebt, die bey einer solchen Behandlung der Wissenschaft, besonders bey solcher Anleitung in Bezug auf den Kalkul, wie sie die gewöhnliche Buchstabenrechnung an die Hand giebt, doch noch Fortschritte in der Wissenschaft machen. Nur die unendliche Mühe und die lange Zeit die von diesen darauf verwandt wird, und das gänzliche Hingeben in das geistlose Geschäft der ewigen Wiederholung eines mechanischen Verfahrens, das ohne alle Gründe versehen, und daher zur Geistesabstumpfung am geschaffensten ist, erklären uns die Möglichkeit dieser immer sehr seltenen Ausnahmen.

scheitert, ohnerachtet sie, wenn der Kalkul aus dem wahren Gesichtspunkt betrachtet wird, eben so natürlich und einfach, wie die Brüche und die Lehre der entgegengesetzten Größen ꝛc. ꝛc., unmittelbar aus der Ansicht selbst hervorgehen, und die Wahrheit der Resultate, die sie geben, auf das strengste erwiesen werden kann.

§. 103. Ist aber der Kalkul erst in seinen Principien gehörig streng und evident begründet, wie dies z. B. bey der Geometrie der Fall ist, so gewinnen auch die höhern Theile desselben, z. B. die Lehre der Reihen, die höhern Gleichungen, und insbesondere die Differentialgleichungen eine Klarheit und die mathematische Evidenz, die man bis jetzt vergebens gesucht hat. Besonders wichtig ist diese Umformung für die Anwendungen des Kalkuls, indem diese mit einer ungemeinen Einfachheit und Leichtigkeit statt finden können.

Da hier nicht der Ort ist, mich weitläufiger hierüber auszulassen, so verweise ich in dieser Beziehung auf das schon in der Zueigungsschrift erwähnte große Werk: *Revision der gesammten Mathematik*, das aber erst nach Jahren erscheinen kann und auf keinen Fall in meinen gegenwärtigen amtlichen Verhältnissen. Einstweilen wird man jedoch Befriedigung finden in der oben schon erwähnten *Arithmetik und Algebra für die Schulen und Universitäten Deutschlands*, welche auf meine Principien gegründet ist, und wahrscheinlich nächste Michaelis erscheinen wird.

§. 104. Indem ich daher meine Bemerkungen über den Kalkul schließe, füge ich noch hinzu, daß ich nur die Mathematik, aber nicht die Mathematiker anzugreifen Willens war. Die *gänzliche* Umformung, die ich mit dem Kalkul

vornehmen mußte, um endlich ein völlig und streng begründetes System aufstellen zu können, wird zu seiner Zeit beweisen, welche vieljährige und unausgesetzte Mühe und Arbeit ich verwenden mußte, um mich nach und nach von allen den Ansichten, die ich von dem ersten Unterricht an, den ich erhielt, einsaugte, loszureissen und auf immer lichtere und lichtere Punkte zu erheben, bis ich endlich das Wesen des Kalkuls in seiner Reinheit und Wahrheit aufgefaßt zu haben glaube. Diese Arbeit mag das reine Streben nach Wahrheit beurkunden, das mich belebte, und das meine eigene Befriedigung zum Hauptzweck, eine Erleichterung des mathematischen Studiums aber zum beständigen Nebenzweck hatte. Beyde scheinen mir zugleich erreicht. Ob meine Ansicht auch zur allgemeinen Befriedigung dienen wird, mag die Zeit lehren. Daß sie aber eine Erleichterung des mathematischen Studiums möglich macht, ist nicht nur durch den Erfolg meines Unterrichtes außer allen Zweifel gesetzt, sondern es gehet auch zugleich aus demselben Erfolg mit überzeugender Kraft hervor, daß diese Erleichterung so ungemein bedeutend und wichtig ist, um durch sie allein ein Wiederbeleben des mathematischen Studiums in Deutschland möglich machen zu können, wenn Deutschlands Mathematiker und vorzüglich dessen Lehrer der Mathematik meine Behauptungen mit partheylosem Eifer prüfen und beherzigen wollten.

Uebrigens wiederhole ich, was ich oben schon ausgesprochen habe, daß sich nehmlich der Mathematiker ein weit größeres Verdienst um seine Wissenschaft erwirbt, dem es gelingt, neue fruchtbare Methoden im Kalkul zu entdecken, oder doch die vorhandenen zu erweitern und zu verallgemeinern, als wenn er dieselbe Zeit auf me

taphysische Spekulationen verwendet, die am Ende zu nichts führen können. Auch mir ist die Erweiterung der Wissenschaft ein wichtiger Zweck meiner Arbeiten, und es konnte mir daher um so weniger in den Sinn kommen, die Mathematiker anzugreifen (diejenigen nehmlich, die dieses Namens würdig sind). Im Gegentheil: ist es mir wirklich gelungen, Licht und Ordnung und Klarheit in die gesammte Mathematik zu bringen, so verdanke ich es einzig denen, deren Mühe und Fleiß und Genie die Materialien dazu geliefert haben; und vorliegende Blätter können daher nur beweisen, daß jetzt Materialien genug vorhanden sind, um sie, während noch immer fort neue herbeygeschafft werden müssen, einstweilen zu einem brauchbaren und erfreulichen Ganzen zusammenstellen und dadurch eine leichte und gründliche Ansicht des Einzelnen und Uebersicht des Ganzen möglich machen zu können.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Dr. Martin Ohm's, Königl. Preuß. Oberlehrers der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Thorn ... Kritische Beleuchtungen der Mathematik überhaupt und der Euklidischen Geometrie insbesondere für Mathematiker und Nichtmathematiker als Einleitung in dessen Revision der Mathematik

Berlin 1819

Math.u. 144 h
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594163-9